

Kaotikus jelenségek dinamikai rendszerekben



Előadásvázlat I. rész

Készítette:

Plachy Emese

2014



Nyugat-magyarországi Egyetem

Természettudományi Kar

Matematika, Fizika és Műszaki Intézet

A kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlik. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

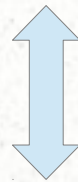
Könyvajánló a kurzushoz

- James Gleick: Káosz - Egy új tudomány születése, Göncöl Kiadó, 2004
- Tél Tamás, Gruiz Márton: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002
- Érdi Bálint: A naprendszer dinamikája, ELTE Eötvös Kiadó, 2005

“Káosz” jelentése

hétköznapi értelemben:

rendetlenség, zűrzavar (mitológia eredet)



tudományos értelemben:

Definíció I.: egyszerű rendszerek bonyolult viselkedése

Definíció II.: nemlineáris dinamikai rendszerek szabálytalan, előrejelezhetetlen viselkedése

Nem pillanatnyi helyzetre utal, hanem időbeli viselkedésre!

Állandósult mozgások

- konzervatív rendszerekben (mechanikai energia állandó)
- disszipatív rendszerekben (= energiaemésztő,
pl. súrlódásos rendszerek)

külső energiabefektetés szükséges (gerjesztés)

- szabályos mozgások
= periodikus (monoperiodikus, multiperiodikus)
- szabálytalan mozgások
kevés összetevőből álló rendszerek esetén: kaotikus

Dinamikai rendszer leírása

- M sokaság: **fázistér** (=állapottér)

olyan geometriailag szemléltethető tér, amiben egy dinamikai rendszer összes lehetséges állapotai szerepelnek: a rendszer minden egyes lehetséges állapota a fázistér egyetlen pontjának feleltethető meg.

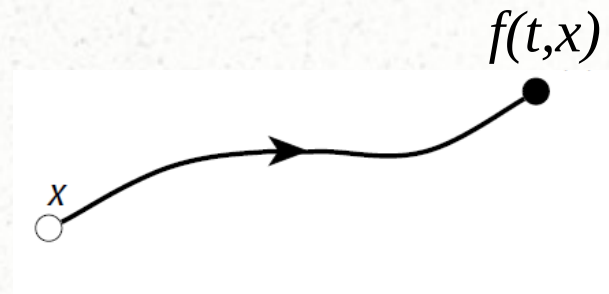
A rendszer térben és időben változó paramétereit feszítik ki:
(szabadsági fok)

pl.: egy részecske helye és sebessége

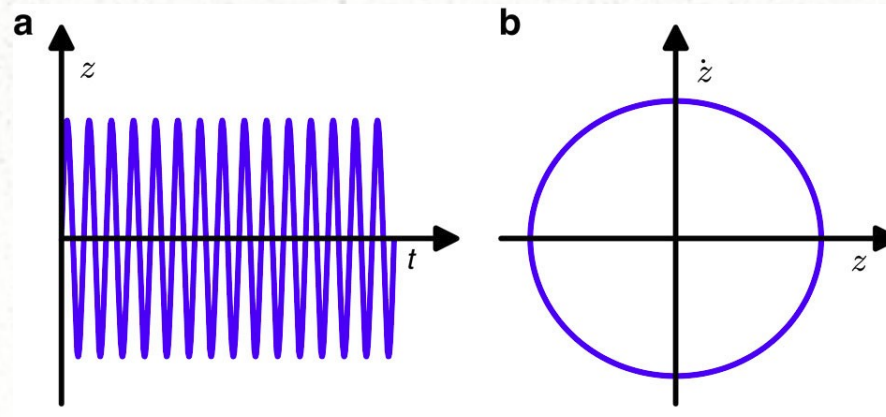
- $f(t,x)$ időfejlődést leíró szabály (függvény)
pl.: mozgásegyenlet megoldása (differenciálegyenlet)

Trajektória

A rendszer időbeli fejlődése
egy pálya mentén halad a fázistérben:



Például egy szinuszos periodikus rendszer kitérés és sebesség által
kifeszített fázisterében egy kör:



Periodikus viselkedés

1. ismétli önmagát
2. későbbi állapota pontosan megjósolható
3. egyszerű geometriájú fázistér:
(pl. adott helyzetbe mindig ugyanazzal a sebességgel tér vissza)

Kaotikus viselkedés

1. szabálytalan mozgás

önmagát nem ismétlő (nem periodikus v. aperiodikus)

2. előrejelezhetetlen

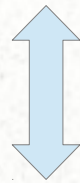
kezdőfeltételekre való érzékenység: kis kezdeti eltérések gyorsan megnőnek

3. szokatlan, bonyolult, de jól meghatározott fázistérbeli geometria

Sztohasztikus viselkedés

= véletlen, valószínűségi változók jellemzik

pl. zaj, véletlen bolyongás, Brown-mozgás



determinisztikus rendszerek:

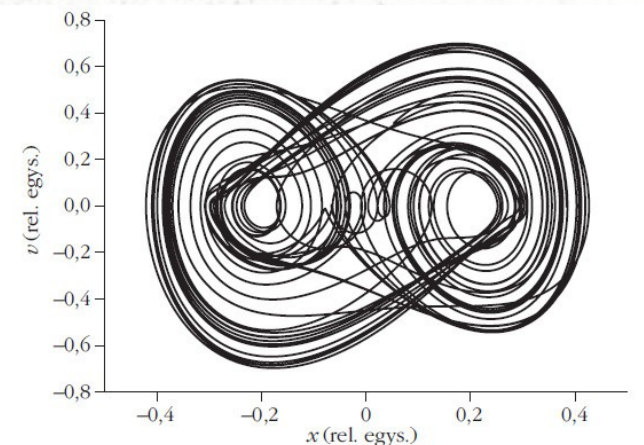
időbeli fejlődés egyértelműen következik a kezdőállapottól, ennek ellenére a mozgás véletlenszerűnek tűnhet: káosz

Példa nemlineáris rendszerre

- Harmonikus rezgés - lineáris $\ddot{x} = -\omega_o^2 x$
- Csillapított harmonikus rezgés – lineáris $\ddot{x} = -\omega_o^2 x - c \dot{x}$
- Csillapított és állandó amplitúdóval gerjesztett - lineáris
 $\ddot{x} = -\omega_o^2 x - c \dot{x} + \cos(\omega t)$
- Csillapított és parabolikus helyfüggő erővel gerjesztett - nemlineáris

$$\ddot{x} = -\omega_o^2 x - c \dot{x} + (1 - ax^2) \cos(\omega t)$$

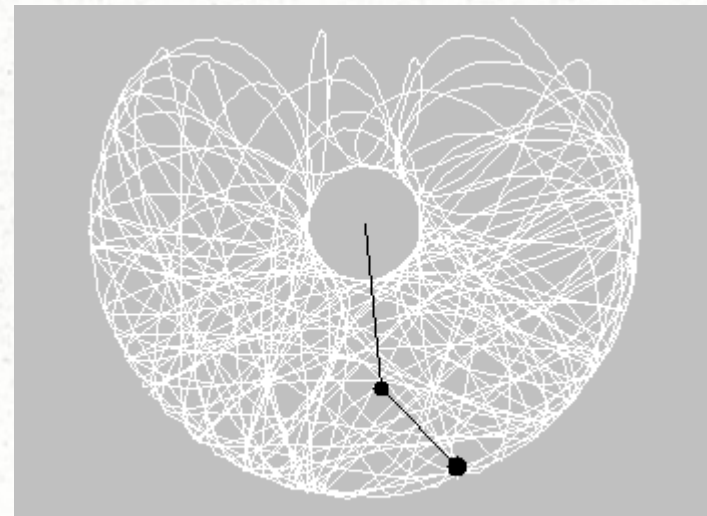
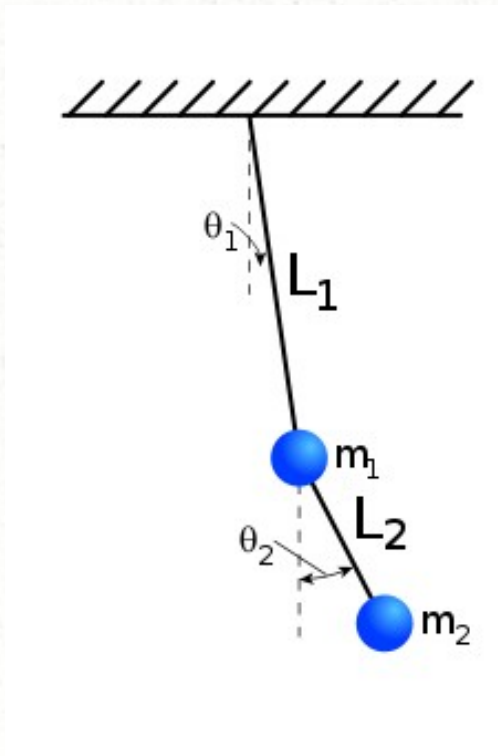
Ha az ismeretlen függvényre és ennek deriváltjaira nézve a differenciálegyenlet lineáris és ezek szorzatai nem jelennek meg az egyenletben, akkor a differenciál egyenlet lineáris, ellenkező esetben nem lineáris.



Forrás: Slíz Judit Fizikai szemle 2010/4

Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

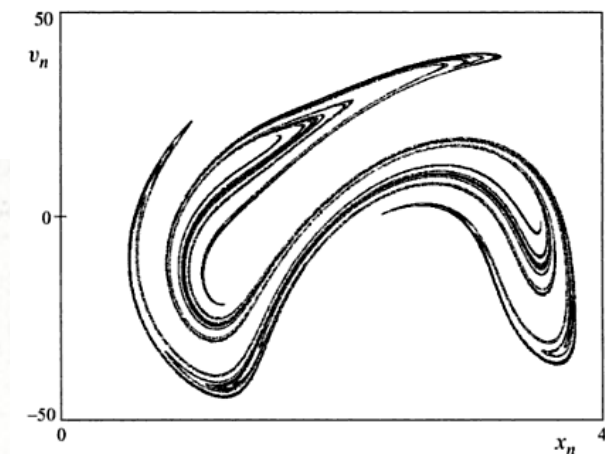
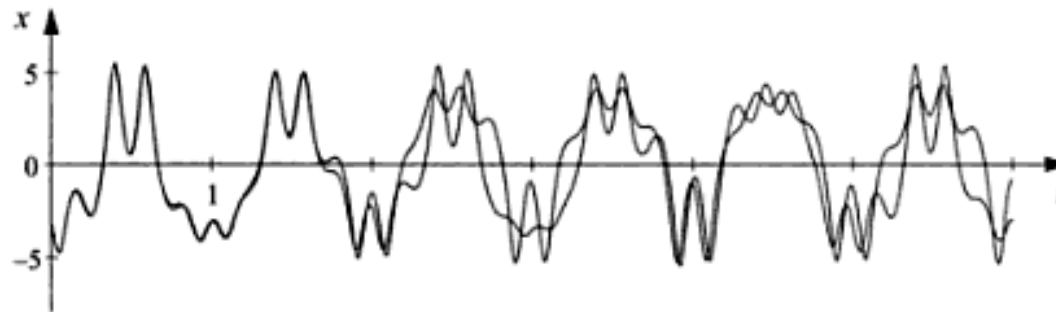
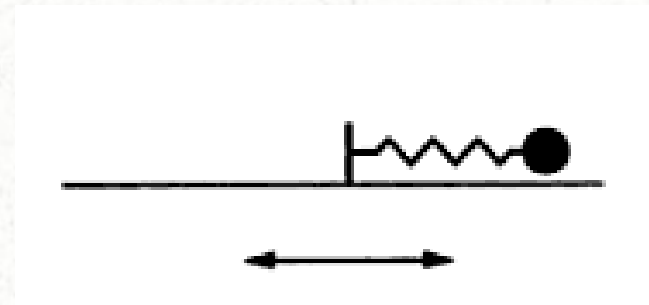
- kettős inga



Forrás: Peter Selinger

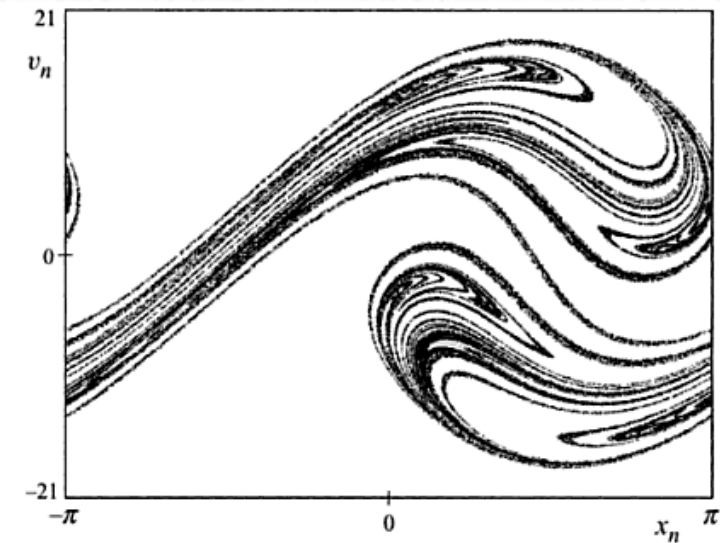
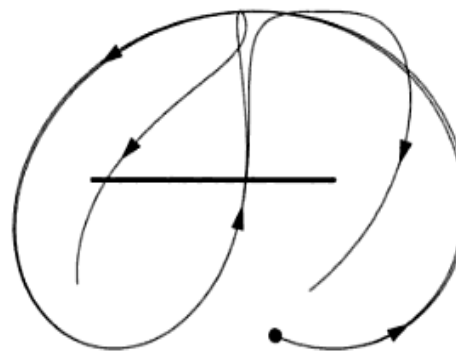
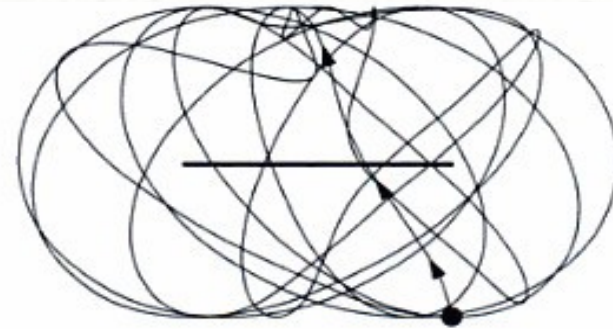
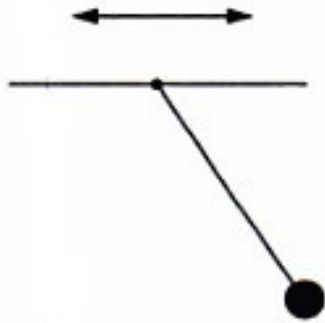
Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

- gerjesztett rezgés
(nemlineáris rugóerő)



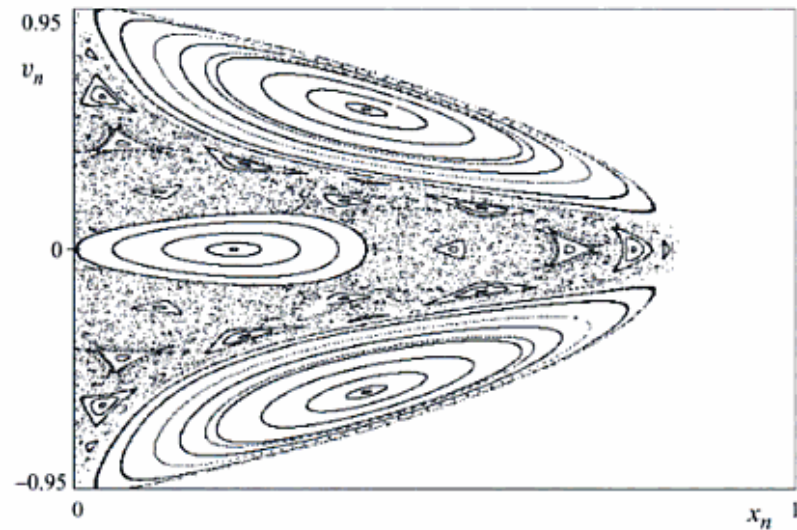
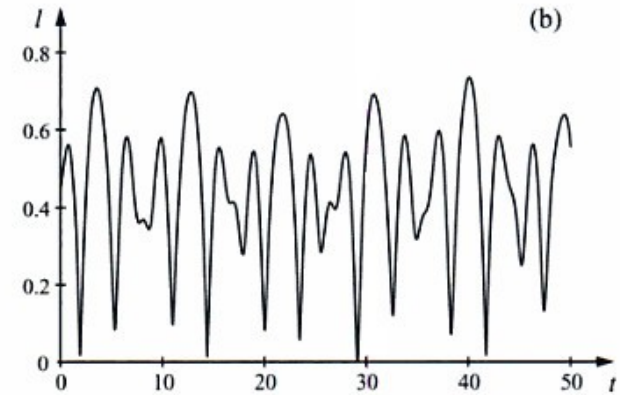
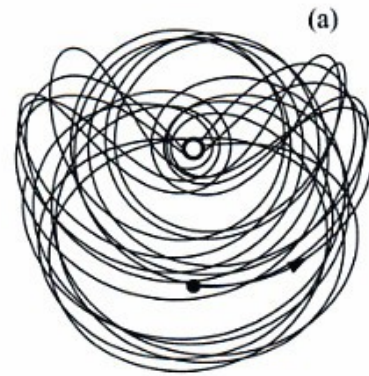
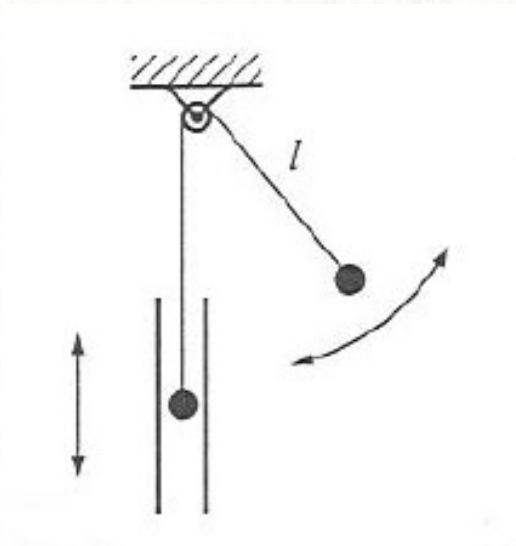
Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

- rezgetett inga



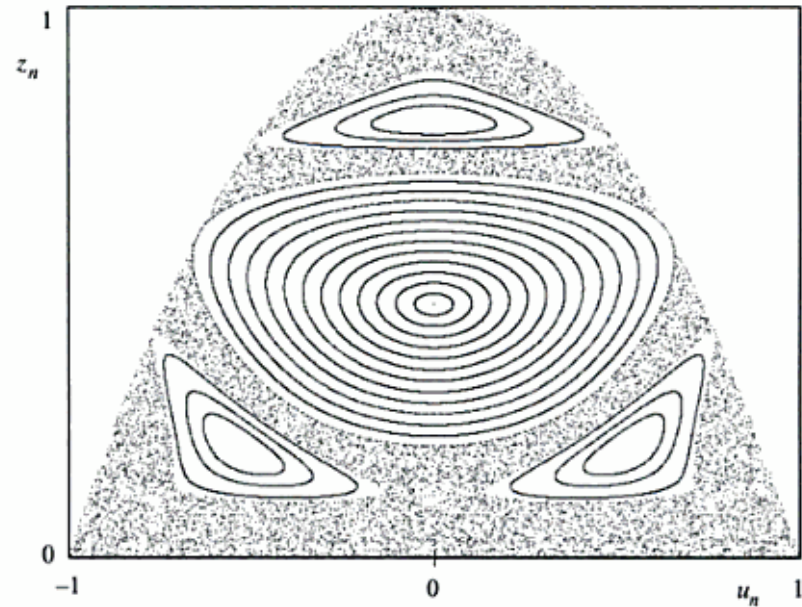
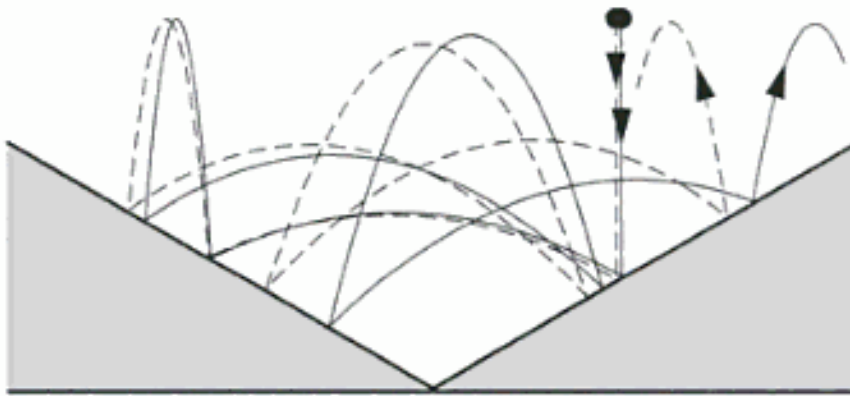
Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

- csigán lengő test



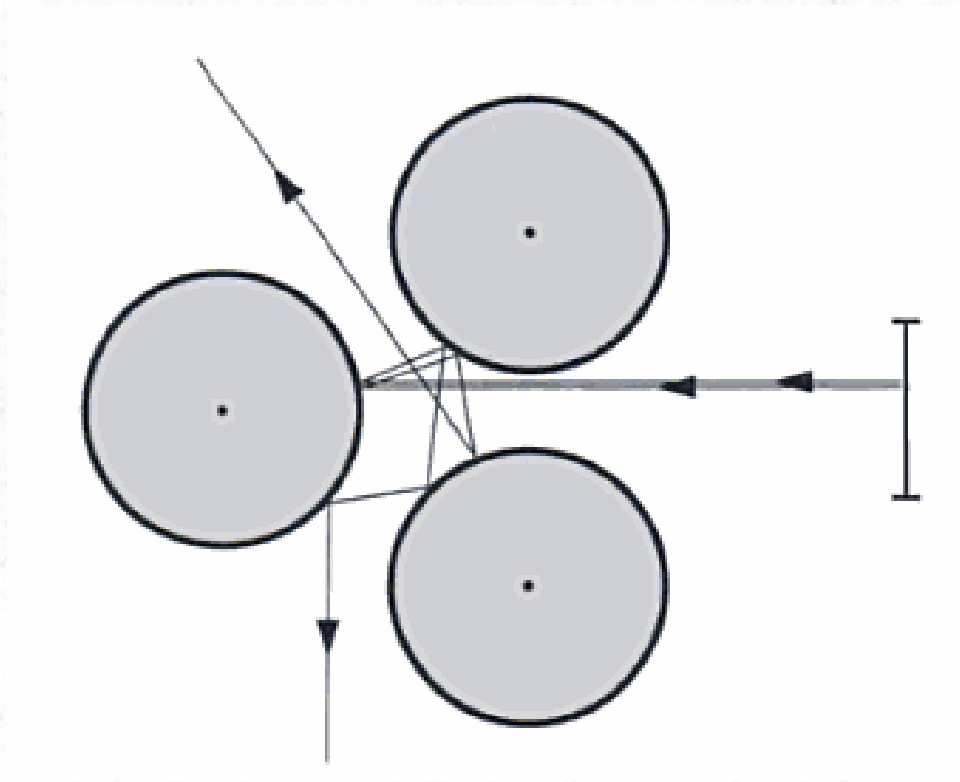
Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

- kettős lejtőn pattogó labda



Kaotikus példák a klasszikus mechanikából

- Háromkorong-probléma



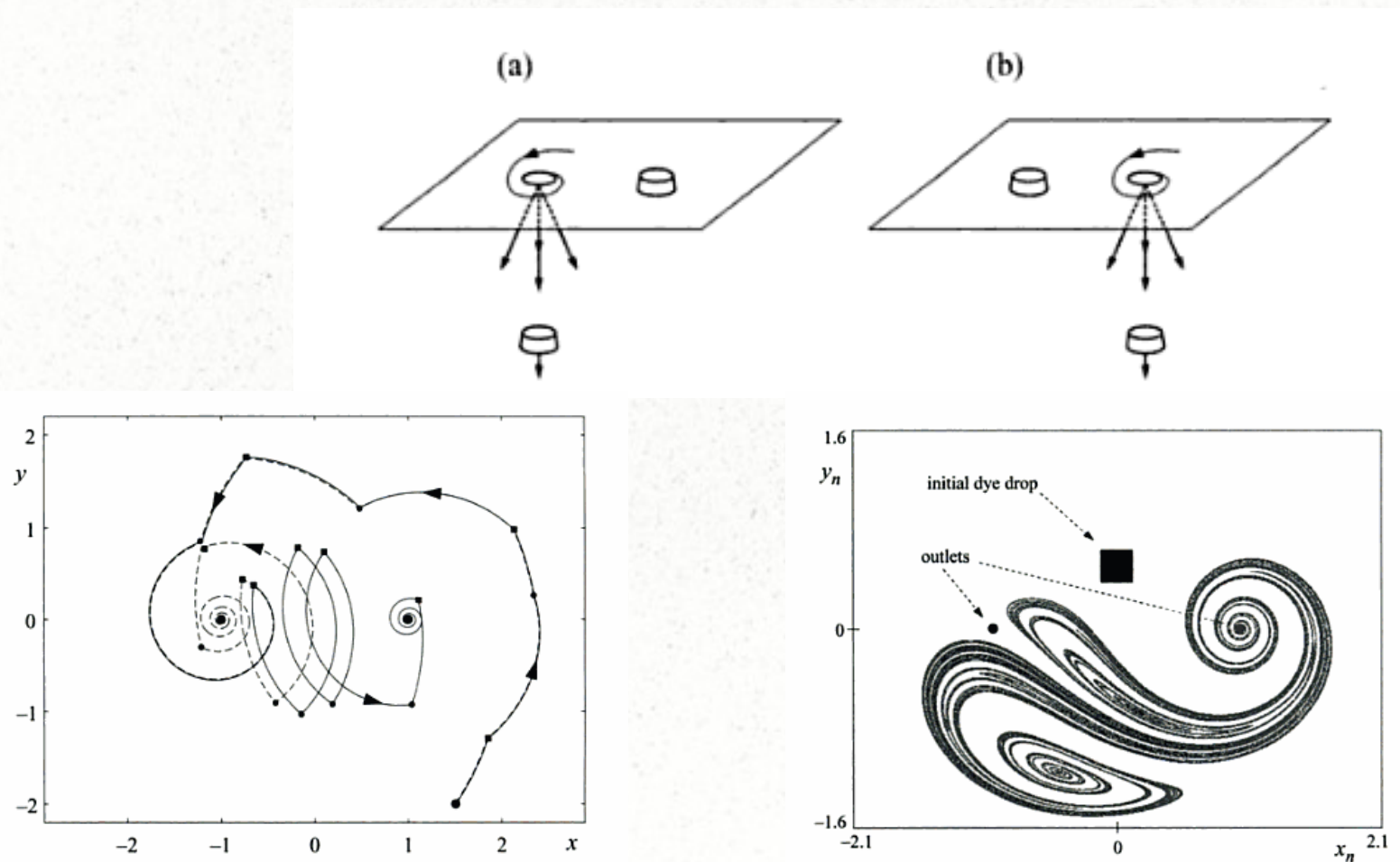
Forrás: Tél Tamás - Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

Kaotikus jelenségek a hétköznapi életben

- Falevelek hullása
- Csap csöpögése
- Rádió begerjedése
- Flipper golyó mozgása
- Vontatott pótkocsi kilengése
- Villámlás nyomvonala
- Zászló csapkodása
- Fegyveres konfliktushoz vezető feszültségek
- Autópályán az autók összetorlódásának folyamata
- Cigarettafüst szétterülése
- Tésztagyúrás, turmix
- Festékek, szennyeződések keveredése

Szennyeződések keveredése

- Felváltva nyitva tartott kétleflyós kád



Forrás: Tél Tamás - Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

Advances in Complex Systems
Advances in Dynamical Systems and Applications
Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems
Chaos and Complexity Letters
Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science
Chaos, Solitons, and Fractals
Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation
Complex Systems
Complexity
Complexity International
Differential Equations and Nonlinear Mechanics
Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems
Ecological Complexity
Ergodic Theory and Dynamical Systems
Fractals
Interjournal of Complex Systems
International Journal of Bifurcation and Chaos
International Journal of Chaos Theory and Applications
International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation
Journal of Advanced Nonlinear Studies
Journal of Complexity
Journal of Nonlinear Science
Journal of System Science and Complexity
Journal of Time Series Analysis
Nonlinear Dynamics
Nonlinear Dynamics and Systems Theory
Nonlinear Dynamics, Psychology, & Life Sciences
Nonlinear Oscillations
Nonlinear Science Today
Nonlinear Studies
Nonlinearity
Regular and Chaotic Dynamics
Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics

Folyóiratok

Káosz különböző tudományterületeken

- Biológia (populáció dinamika: élőlények egyedszámváltozása adott helyen)
- Kémia, biokémia (oszcilláló reakciók)
- Orvostudomány (szív, agy működése, járványok)
- Közgazdaságtan (gazdasági mutatók változása)
- Meteorológia (légtömegek mozgása)
- Csillagászat (Naprendszer dinamikája, változócsillagok, napfoltok)
- Geofizika (folyódinamika, geomágneses pulzáció)
- Mérnöki tudományok (gépek rezgése, áramkörök gerjedése, lézer instabilitások)

A káoszelmélet története

A klasszikus természettudományos világkép:

- ha egy rendszert néhány egyértelműen megadható kapcsolat határoz meg, akkor a rendszer jövőbeni viselkedése egyértelműen megadható
- ha közelítőleg ismeretesek egy rendszer kezdőfeltételei és a rendszert szabályozó törvény akkor közelítőleg kiszámíthatjuk a rendszer viselkedését

Köztudat: jelentéktelen dolgoknak is lehet komoly következménye

Egy szeg miatt a patkó elveszett
A patkó miatt a ló elveszett
A ló miatt a csata elveszett
A csata miatt az ország elveszett
Verd be jól azt a patkószeget!

angol gyermekvers - 14.század

Tudomány: James Clerk Maxwell: 1860 kis változások
mikroszkópikus véletlenszerű mozgásokhoz vezethetnek gázokban

Henri Poincaré



Első determinisztikus kaotikus rendszer felfedezése:

1887 matematika verseny

(II. Oszkár svéd király születésnapja tiszteletére)

Naprendszer stabilitásának problémája

- 1890 háromtest-problémának vannak olyan nemperiodikus pályái, amik sem nem növekednek sem nem tartanak egy fix pontba
- nagyon kicsi figyelmünket is elkerülő okból meglehetősen nagy méretű okozat származhat

(“Bifurkáció” kifejezés is tőle származik 1885)

Kezdetek

- 1889, 1990 Sonja Kovalevszkaja

bizonyítás: súlyos aszimmetrikus pörgettyű mozgása általában szabálytalan, csak speciális tehetetlenségi nyomatékok mellett szabályos

- 1898 Jacques Hadamard

egy részecske súrlódásmentes mozgása
egy “kétlyukú fánk” felületen → széttartó instabil pályák



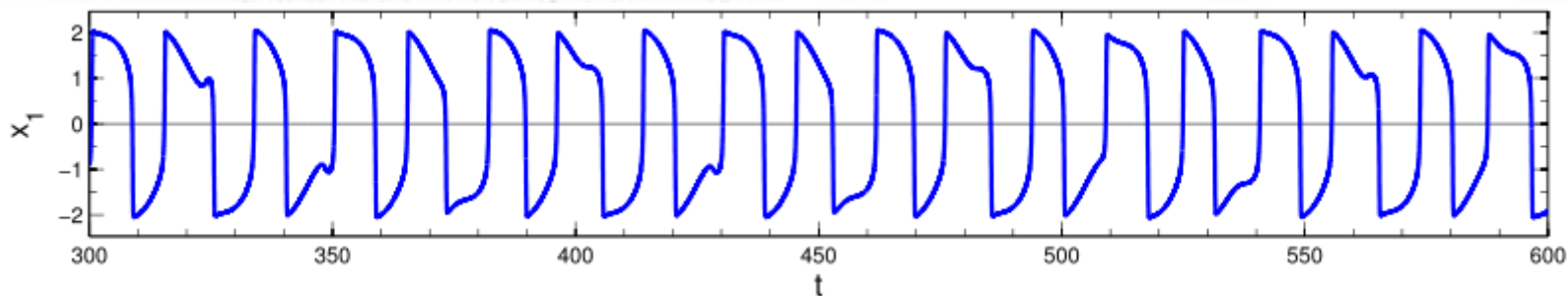
- ~1930-as évek George David Birkhoff,
Eberhard Hopf, Neumann János

ergodelmélet munkáiban (ha a fázistér minden pontja rajta van egy trajektórián, akkor a rendszer ergodikus)

Kezdetek

- 1927 Balthasar van der Pol (holland elektromérnök, PHILIPS) elektroncső vizsgálat, telefonkagylóval hallgatva időnként valami zaj
(Nature, 120, 363)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$



- 1940 Mary Cartwright és John Edensor Littlewood

rádió és a radar nemlineáris áramköreinek leírására használt differenciálegyenletek (van der Pol) vizsgálata során talált kaotikus viselkedés tanulmányozása

Kezdetek

Sok tudós találkozott a káosszal:

nem volt eszközük a megértéshez
hibának gondolták
nem publikálták
tudományágak elszigeteltsége

a tény, hogy ismert egyenletek ellenére sem jelezhető előre a viselkedés: hihetetlen, sokkoló

Elutasítás pl.:

- Borisz Belouszov orosz biokémikus: oszcilláló reakciók felfedezése, nem tudta publikálni (1950-es évek)

Anatolij Zsabotyinszkij 1968-ban bemutatta egy nemzetközi konferencián → Szovjetunió ünnepelt tudósa)

Bolygómozgások

- Perturbációszámítás:

bolygók mozgásának meghatározásához többi bolygó gravitációs hatását is figyelembe kell venni

csak sorfejtések formájában lehet levezetni, azonban a perturbációs sorok nem mindig konvergenssek

nevezőkben: mozgásokra jellemző frekvenciák lineáris kombinációja

rezonanciák közelében $\rightarrow 0$ (kis nevezők problémája)

\rightarrow Több szabadsági fokú nemlineáris rendszerekben a fázistér szerkezete olyan bonyolult lehet, hogy konvergens sorokkal leírni nem lehet.

Bolygómozgások

- Hamilton-függvény: $H(q_i, p_i)$

rendszer energiája kifejezve a helyzeti koordinátájával (q) és impulzusával (p)

- $H(J_i, \theta_i)$ hatás (J) és szögváltozók (θ) bevezetése \rightarrow fázistér szemléltetésére

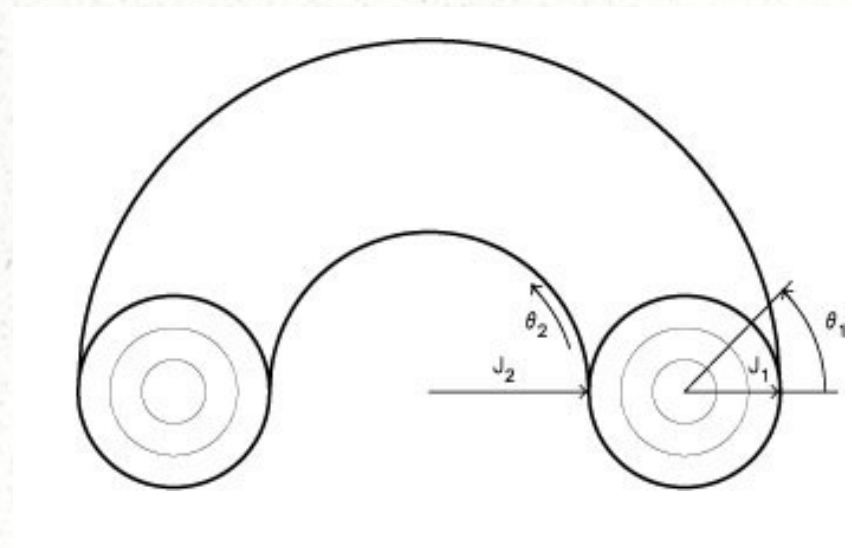
$$H = H_0(\mathbf{J})$$

Megoldás:

$$J_i = \text{áll.}, \theta_i = \omega_i t + \text{áll.}$$

$$\text{ahol } \omega_i = \partial H_0 / \partial J_i$$

($i=1, 2 \dots n$) szabadsági fok
tóruszfelületen való mozgás



KAM-elmélet

$2n$ dimenziós fázistérben

- ha ω_i frekvenciák lineárisan függetlenek

feltételesen periodikus mozgás \rightarrow Invariáns tórusz
n dimenziós tóruszon n független frekvencia

- ha két szabadsági fok között rezonancia lép fel $\omega_i / \omega_k = r/s$
 \rightarrow Rezonáns tórusz
n-1 dimenziós tóruszon n-1 független frekvencia
- Ezek sűrűn vannak a fázistérben

KAM-elmélet

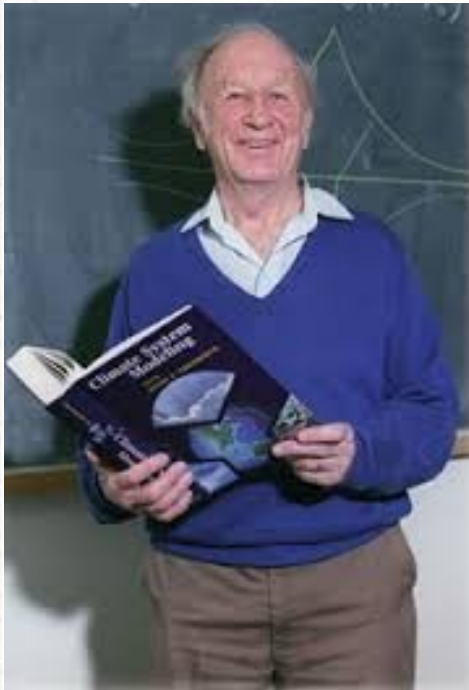
- Perturbált rendszer: $H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{J}) + \varepsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$
- ε perturbáció erősségére jellemző paraméter

1954 A. N. Kolmogorov

1963 V. I. Arnold

1962 J. Moser

- *KAM-tétel: ha egy integrálható rendszert kis konzervatív perturbáció ér akkor azok az invariáns tóruszok, melyek frekvenciái lineárisan függetlenek és elegendően irracionálisak (távol vannak a rezonanciától) nem tűnnek el, csak kissé deformálódnak*
- egymástól véges távolságban vannak \rightarrow közöttük kaotikus tartományok



Edward Lorenz

matematikusnak készült

II. Világháborúban a Légierőkhöz kerül:
időjárás előrejelző

→ elméleti meteorológus
előrejelzés érdekelte

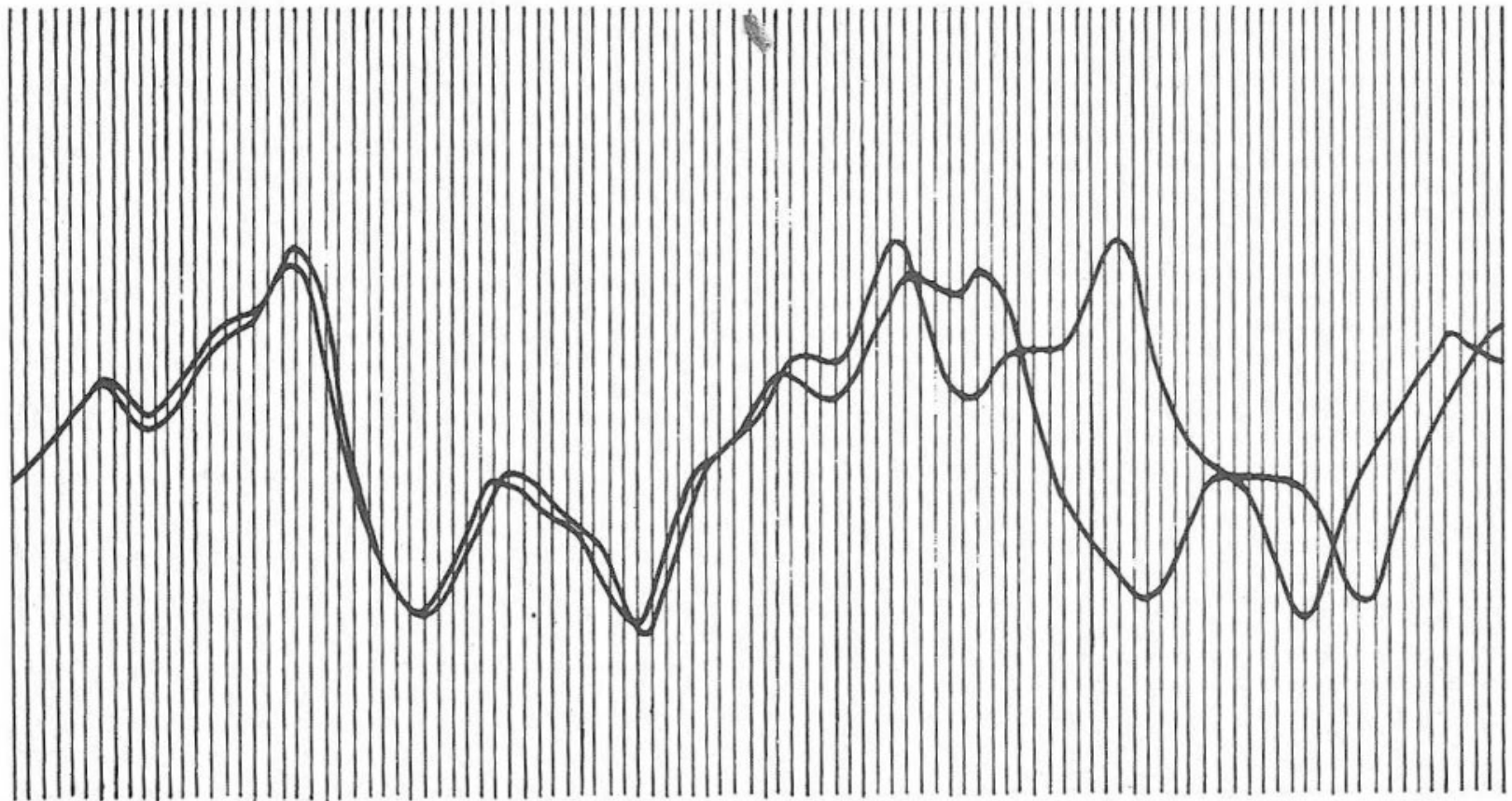
1960 (MIT) Időjárás - játék

teljesen leegyszerűsített időjárás modell
mégis úgy viselkedik, mint a valóságban
→ rendezett rendetlenség

ábrázolta: egy kiválasztott változóra (pl. légáramlás iránya)
→ hullámvonal, sohasem egyforma ciklus

Lorenz

1961: hosszabb adatsor érdekében a közepéről indította a modellt



Edward N. Lorenz / Adolph E. Brotman

Néhány ciklus után teljesen eltért, a nem pontos kezdőérték miatt.

Lorenz

finom geometria szerkezet, melynek csak álcája a véletlenszerűség

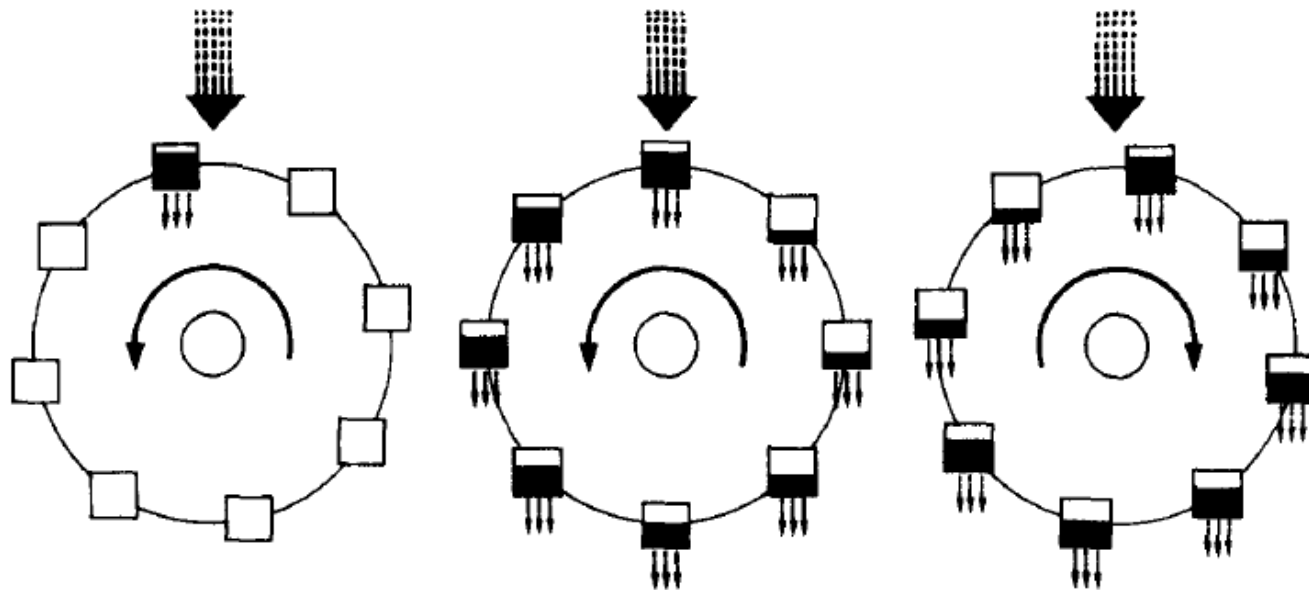
→ Lorenz olyan rendszerek matematikája felé fordult, amelyek sohasem jutnak állandósult állapotba

kapcsolatnak kell lennie az aperiodikusság és a megjósolhatatlanság között

12 egyenletből álló modell

→ K-Ny irányú felmelegedés, eltüntette a periodikusságot

Lorenz vízkerék



Adolph E. Brotman

Az első Lorenz által felfedezett kaotikus rendszer → forgási irány változhat, sebesség sohasem állandósul → nincs ismétlődő minta

Lorenz egyenletek

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

még egyszerűbb

3 egyenlettel leírható rendszer

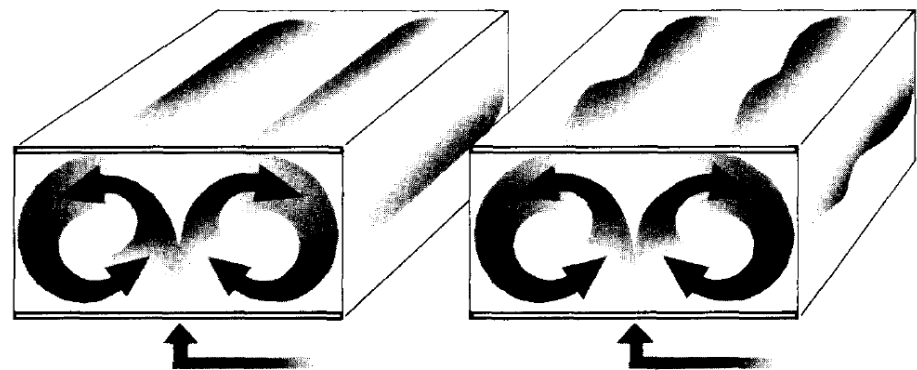
sajátos folyadék mozgás sugalmazta:
konvekció

(Saltzman egyenletek, 1962)

3 dimenziós, nemlineáris

paraméterek:

$\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$



Deterministic Nonperiodic Flow¹

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

ABSTRACT

Finite systems of deterministic ordinary nonlinear differential equations may be designed to represent forced dissipative hydrodynamic flow. Solutions of these equations can be identified with trajectories in phase space. For those systems with bounded solutions, it is found that nonperiodic solutions are ordinarily unstable with respect to small modifications, so that slightly differing initial states can evolve into considerably different states. Systems with bounded solutions are shown to possess bounded numerical solutions.

A simple system representing cellular convection is solved numerically. All of the solutions are found to be unstable, and almost all of them are nonperiodic.

The feasibility of very-long-range weather prediction is examined in the light of these results.

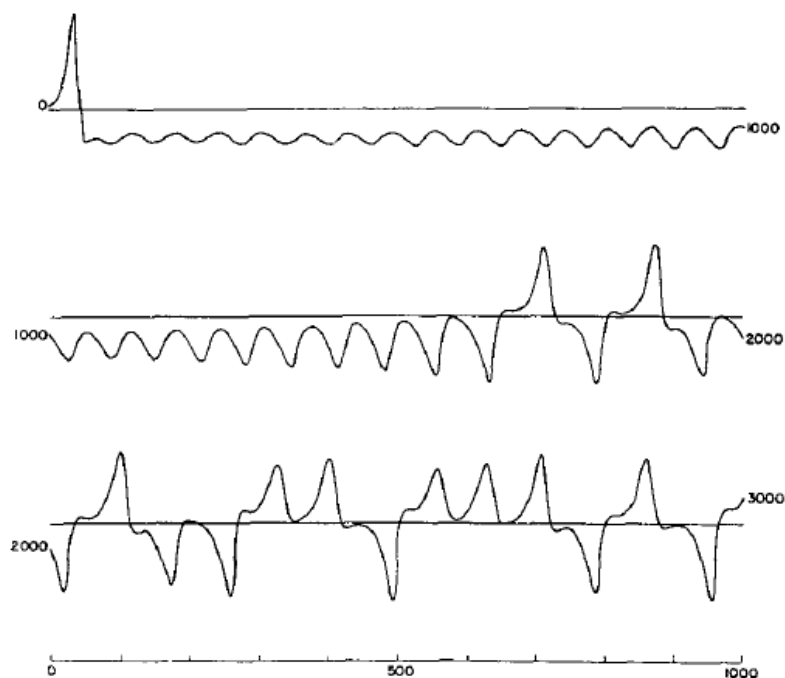


FIG. 1. Numerical solution of the convection equations. Graph of Y as a function of time for the first 1000 iterations (upper curve), second 1000 iterations (middle curve), and third 1000 iterations (lower curve).

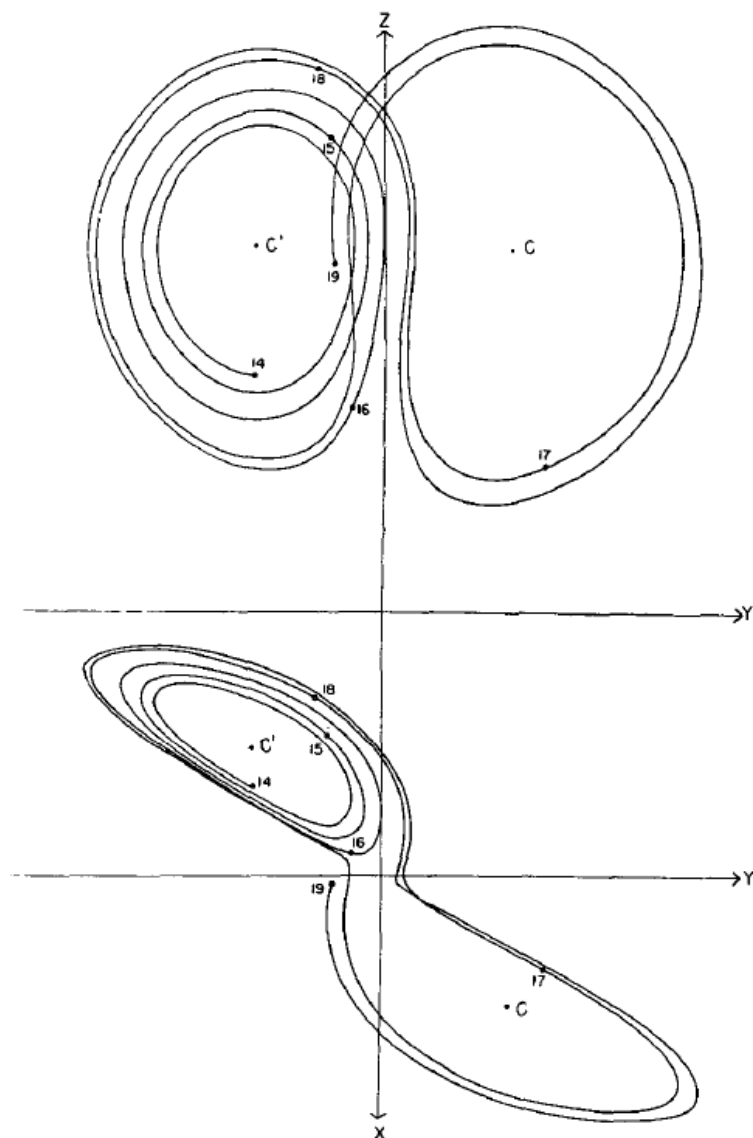


FIG. 2. Numerical solution of the convection equations. Projections on the X - Y -plane and the Y - Z -plane in phase space of the segment of the trajectory extending from iteration 1400 to iteration 1900. Numerals "14," "15," etc., denote positions at iterations 1400, 1500, etc. States of steady convection are denoted by C and C' .

Pillangó-hatás



Egy pillangó szárnycsapása Brazíliában okoz-e tornádót Texasban?

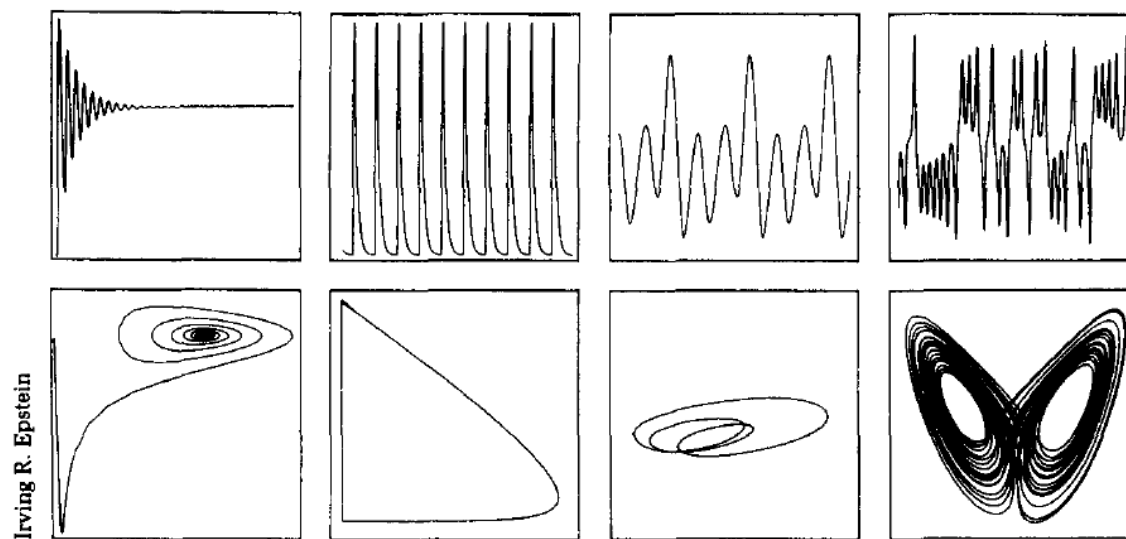
= érzékenység a kezdőfeltételekre

1972, The 139th meeting of the American Association for the
Advancement of Science

Stephen Smale

Topológia: a matematikának az a részterülete, amelyik az alakzatoknak a folytonos deformációk - nyújtások, csavarások stb. - közben is megmaradó tulajdonságaival foglalkozik.

→ dinamikai rendszerek felé fordul: van der Pol oszcillátor
feltevés: szabálytalan viselkedés nem lehet stabil → téves 1959

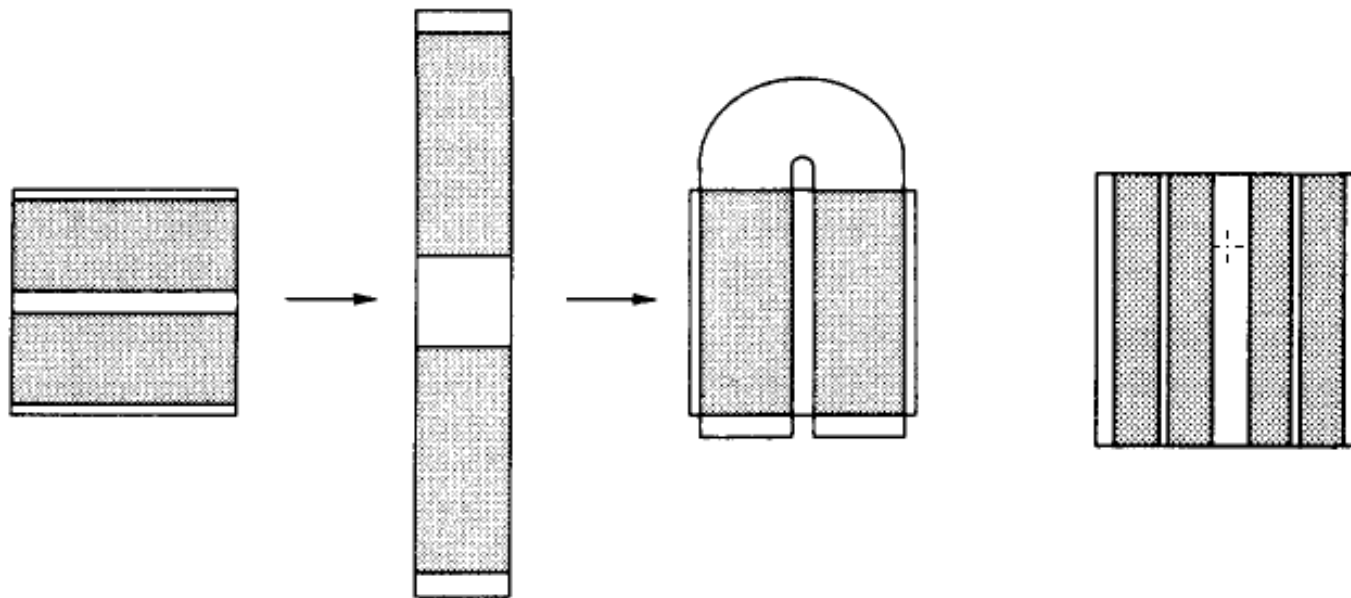


fázistérbeli alakzatok transzformációját vizsgálta

Pl.: ha disszipáció van, a fázistérben összehúzódik az alakzat, mire leáll, egyetlen pontba zsugorodik

Lópatkó leképezés (Smale-patkó)

H. Bruce Stewart and J. M. Thompson



szemléletes analógia a kezdeti feltételek iránti érzékenységre

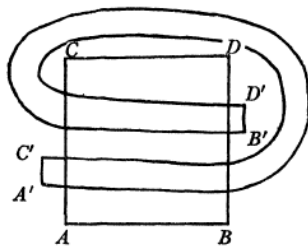


FIGURE 3

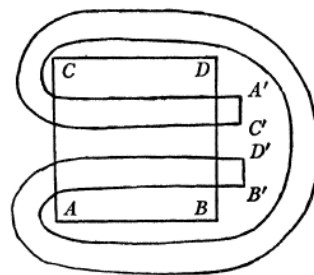


FIGURE 4

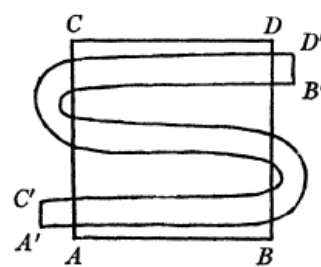


FIGURE 5

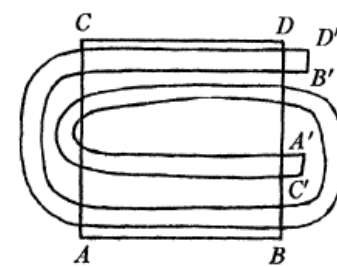


FIGURE 6

Ökológia szerepe a káoszelméletben

20.sz ~ környezetbiológia: dinamikai rendszerekként kezeli a populációkat

1970-es években sajátos szerep a káosz tudományának létrehozásában

matematikai modelleket használtak: halovány közelítése a valóságnak

munkamódszer:

- adatgyűjtés
- igyekezni olyan egyenletet találni, mely hasonló eredményt ad
- egyszerűsítés, diszkrét időintervallum:

számos állatfaj csak egy szaporodási cikluson át marad életben (nemzedékek nem keverednek), járványoknál is használható

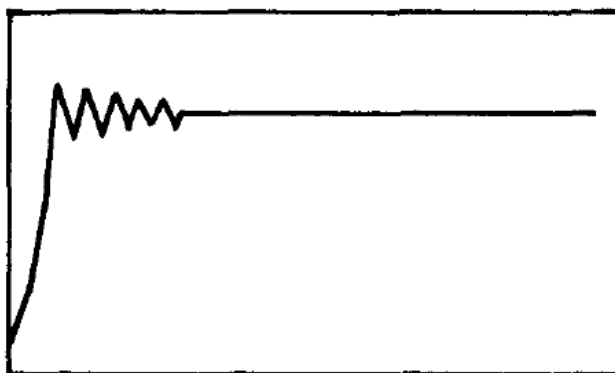
Logisztikus leképezés

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

előző évi egyedszámtól függ

kell valami ami korlátozza a növekedést amikor az egyedszám már nagyra válik

pl. $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$ logisztikus differenciaegyenlet 1950-es évek



Logisztikus leképezés

r hogyan befolyásolja az egyedszám változást:

0 és 1 között: a populáció kihal

1 és 2 között: $r-1/r$ értéken állapodik meg

2 és 3 között: $r-1/r$ értéken állapodik meg, de előtte fluktuál

→ két érték között oszcillál

→ négy, 8, 16, 32 stb. érték között oszcillál

→ szabálytalan, de nem mindegyik r értékre

Feltették, hogy a szabálytalan viselkedésnek semmi köze a modellekhez, csak azért van, mert valamit figyelmen kívül hagytak

James Yorke

matematikus

ő adott nevet a káosz tudománynak

találkozik 1972 Lorenz tanulmányával

a természet lényegileg nemlineáris, a megoldható szabályos lineáris rendszerek a rendellenesek

cikk: „A hármas periódus káoszra utal” (Li & Yorke, 1975)

ha valamely 1 dimenziós rendszerben feltűnik egy szabályos hármas periódus → bármilyen más szabályos ciklus is felbukkanhat

~ A.N. Sarkovszkij (1964, övé az elsőbbség)

Robert May

biológus (eredetileg fizikus, majd alkalmazott matematikus)
logisztikus leképezéssel foglalkozott

1976 Nature 261, 459

bifurkáció: perióduskettőződés

kaotikus tartomány:

látszólagos véletlenség

ablakok:

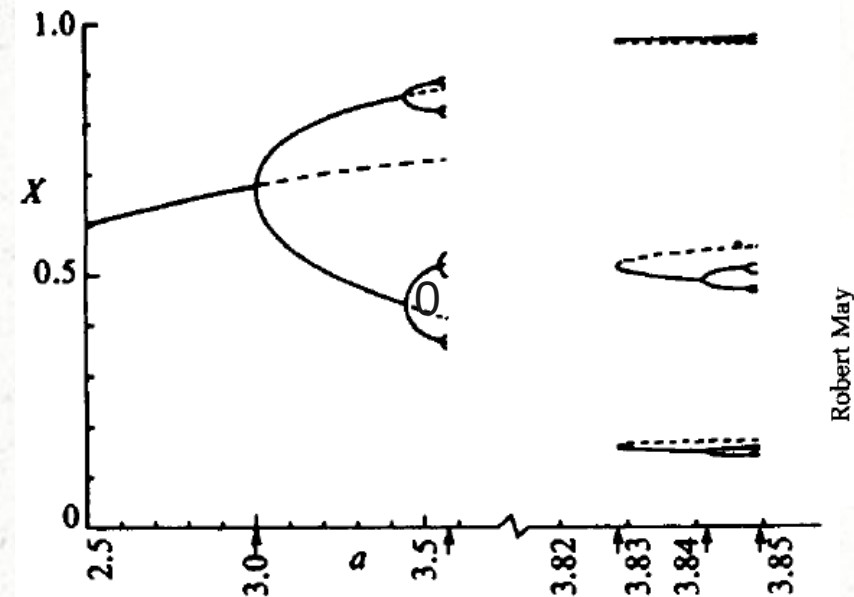
páratlan periódus a jellemző

3 aztán bifurkál 6, 12 v. 7, 14, 28 ...

Alkalmazás: pl. járvány

zavaró tényező (oltási program) után hatalmas oszcillációk kezdődnek,
rövid távon úgy tűnik, hogy sikertelen volt

→ káoszt oktatni kéne

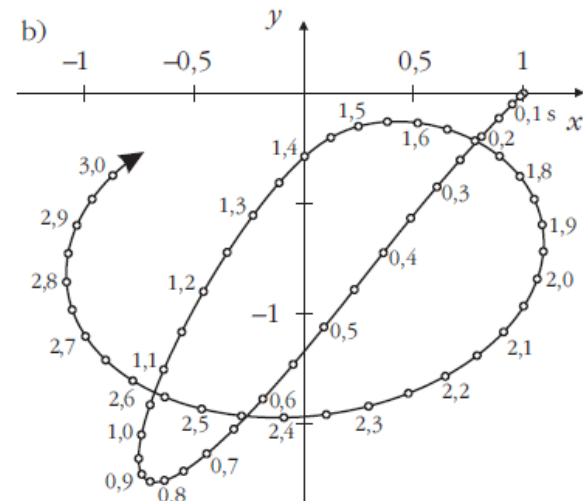
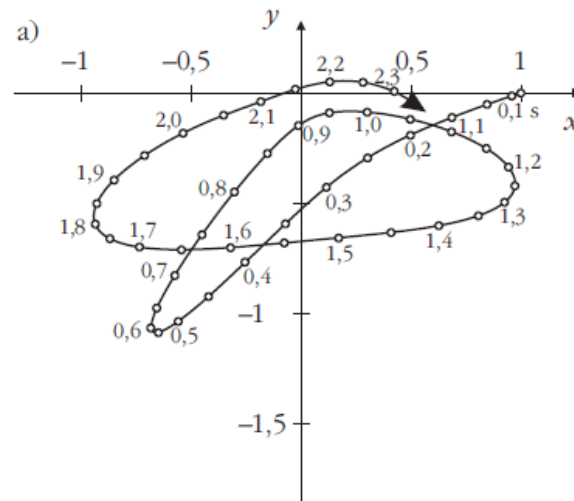


Rugalmas fonalú inga esete

„Az 1965. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának 1. feladata:

Felfüggesztett L hosszúságú, elhanyagolható tömegű rugóra kisméretű testet akasztunk. A rugót a testtel együtt vízszintes helyzetbe hozzuk (a rugó akkor nyújtatlan állapotban van, hossza L) és elengedjük. Ismeretes a rugó D állandója, amely szerint a rugalmas erő arányos az x megnyúlással: $F = -Dx$. Mekkora a rugó megnyúlása, amikor a test éppen a felfüggesztési pont alatt halad át?

Vermes Miklós



Cantor-halmaz

(Felefedező Henry John Stephen Smith 1874) Georg Cantor
halmazelmélet megalkotója 1883



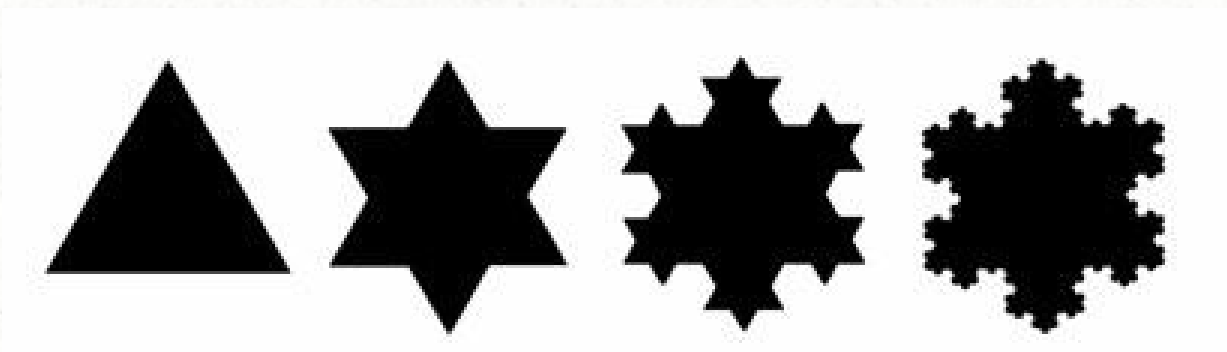
Elhagyott intervallumok hossza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1.$$

Cantor-halmaz hossza: $1 - 1 = 0$

Koch-görbe

1904 Helge van Koch svéd matematikus (Koch-hópehely)



tulajdonságok:

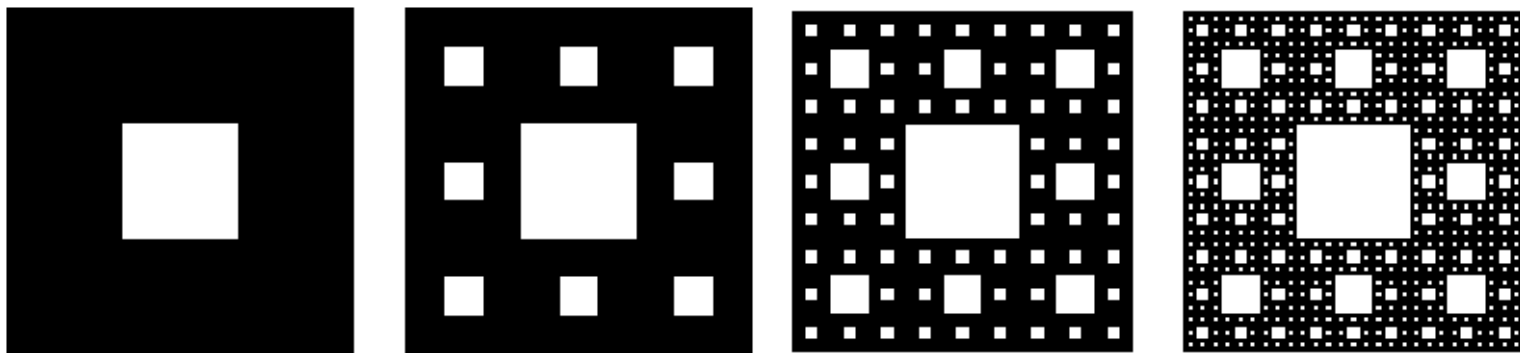
- sosem metszi önmagát
- minden alakítás növeli a területet, de nem nő akármennyig, a háromszög köré írt körön túl pl. soha nem növekszik
- görbe végtelen hosszú, mindig $\frac{4}{3}$ szorosára növeli a teljes hosszat
- folytonos, de sehol sem sima

paradoxon: véges területhez végtelen hossz

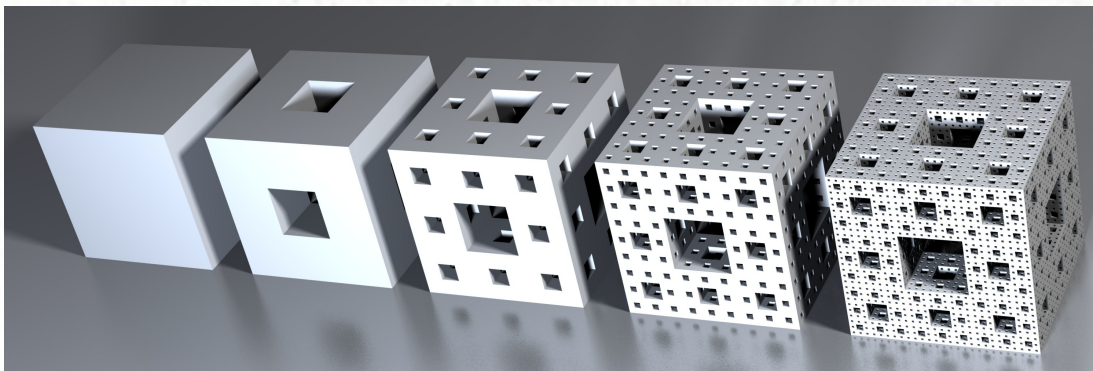
Sierpiński-háromszög



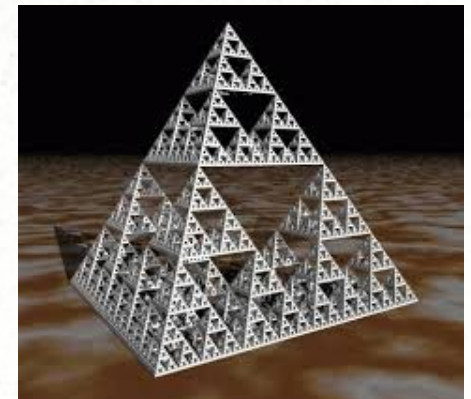
Sierpiński-szőnyeg



Menger-szivacs



Sierpiński-szivacs

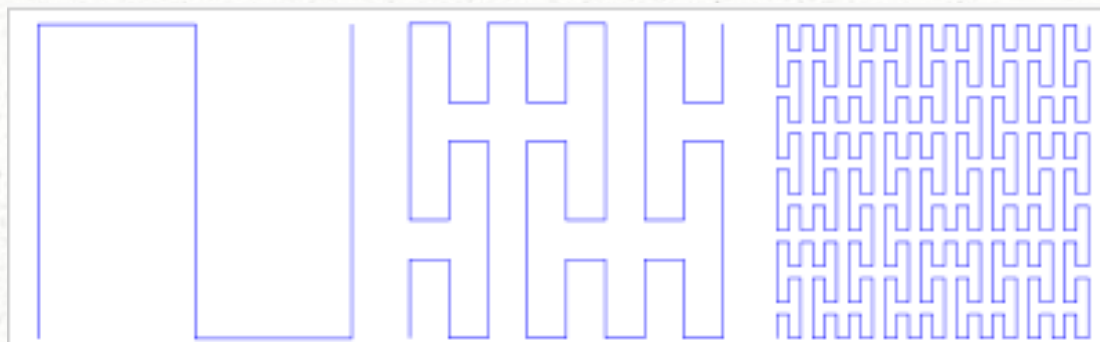


minden lapja Sierpiński-szőnyeg, minden átlója Cantor halmaz

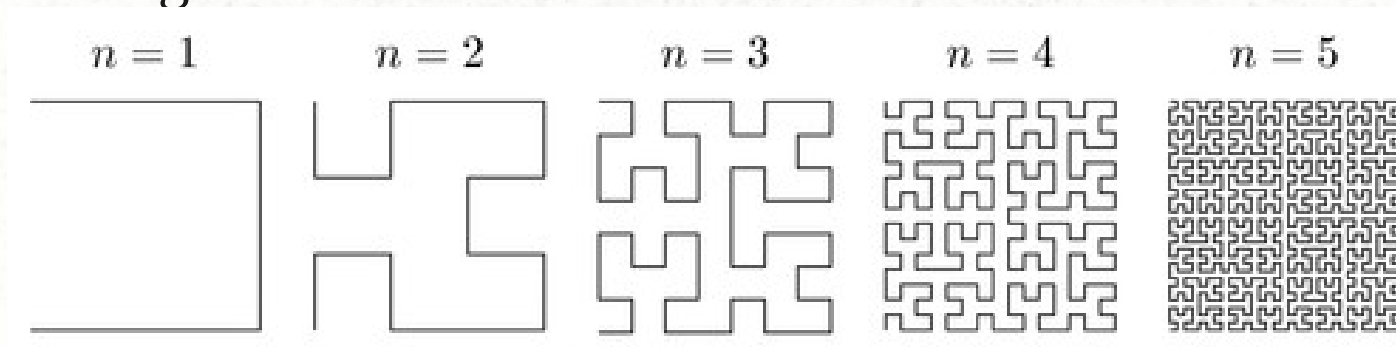
Térkitöltő görbék

egyszeresen és hézagtalanul lefednek egy négyzetet

- Peano-görbe:



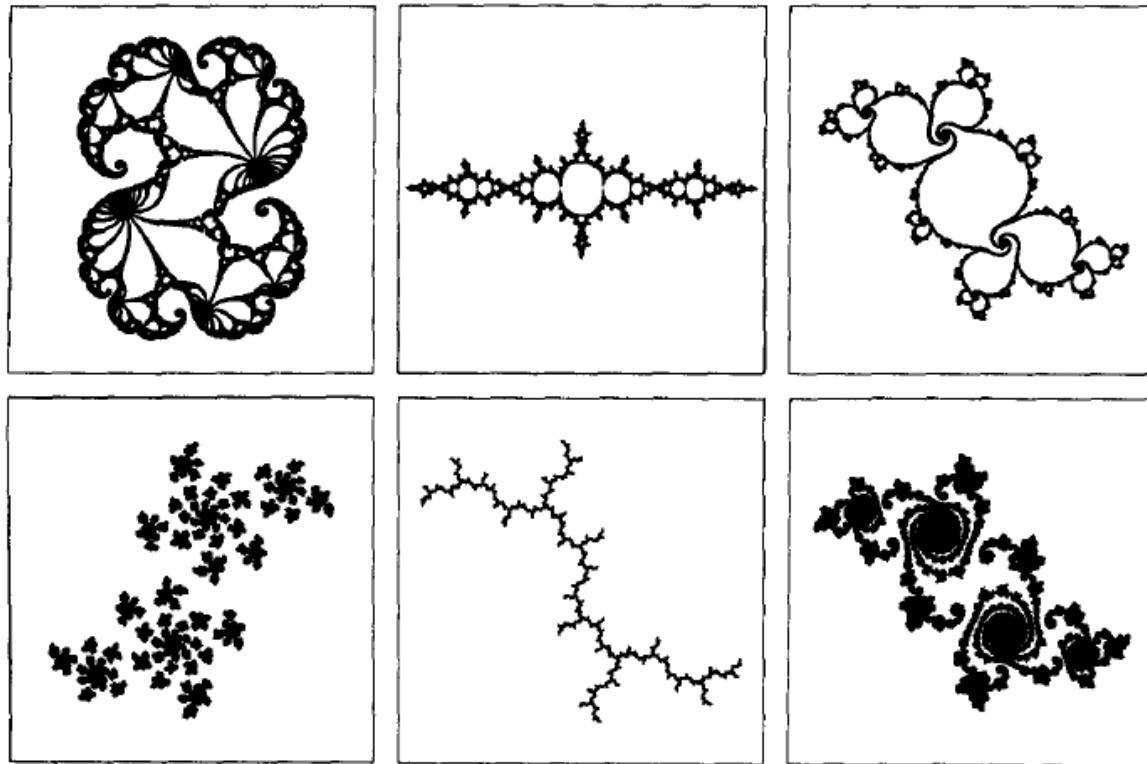
- Hilbert-görbe:



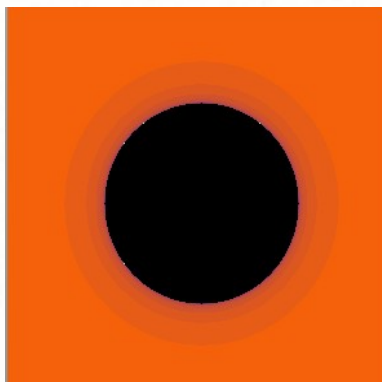
Julia-halmazok

- 1918 Gaston Julia és Pierre Fatou matematikusok egymástól függetlenül

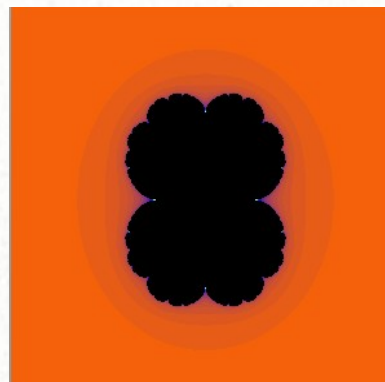
komplex számsíkon: $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ahol $z=x+iy$, c konstans



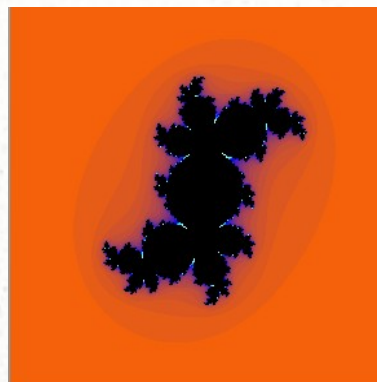
$$z^2$$



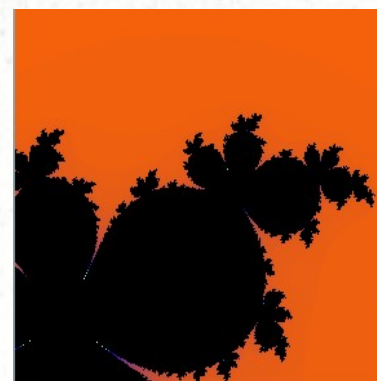
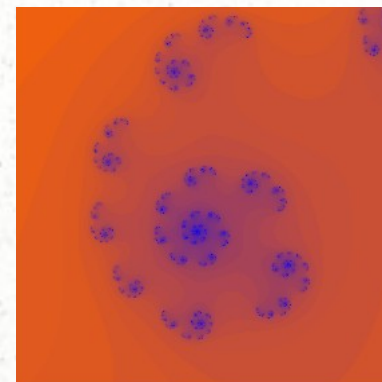
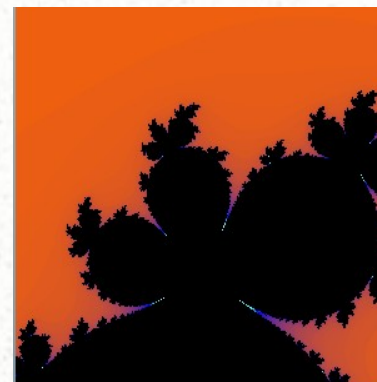
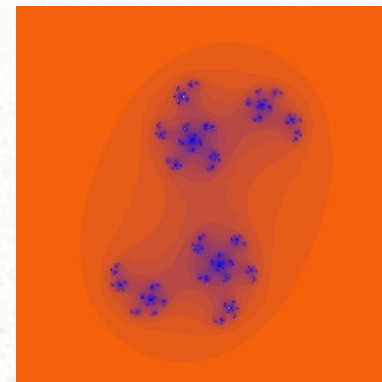
$$z^2+0.25$$



$$z^2+0.25+0.5i$$



$$z^2+0.45+0.1428i$$



Benoît Mandelbrot

“fraktálgeometria atyja”

IBM matematikusa

- fraktál elnevezés (1975)
- széles körű tudományos jelentőség felismerése, népszerűsítése

Harvard meghívott előadó: kis és nagy jövedelemeloszlásokról

“Hogyan materializálódott az ábrám az előadásom előtt?”

~gyapotárak alakulása → The Journal of Business, 36, 394 (1963)



Szimmetria kis és nagy méretek között

telefonvonalon továbbított információ:

a zajt jel erősítéssel nem lehet bizonyos szint alá csökkenteni, a jel egy részét is elfedheti

a hibák időközönként voltak

→ hibás és tiszta időszakok: arányuk minden nagyságrendben állandó

~ Cantor-halmaz

Partvonal probléma



Unit = 200 km,
Length = 2400 km (approx.)



Unit = 100 km,
Length = 2800 km (approx.)

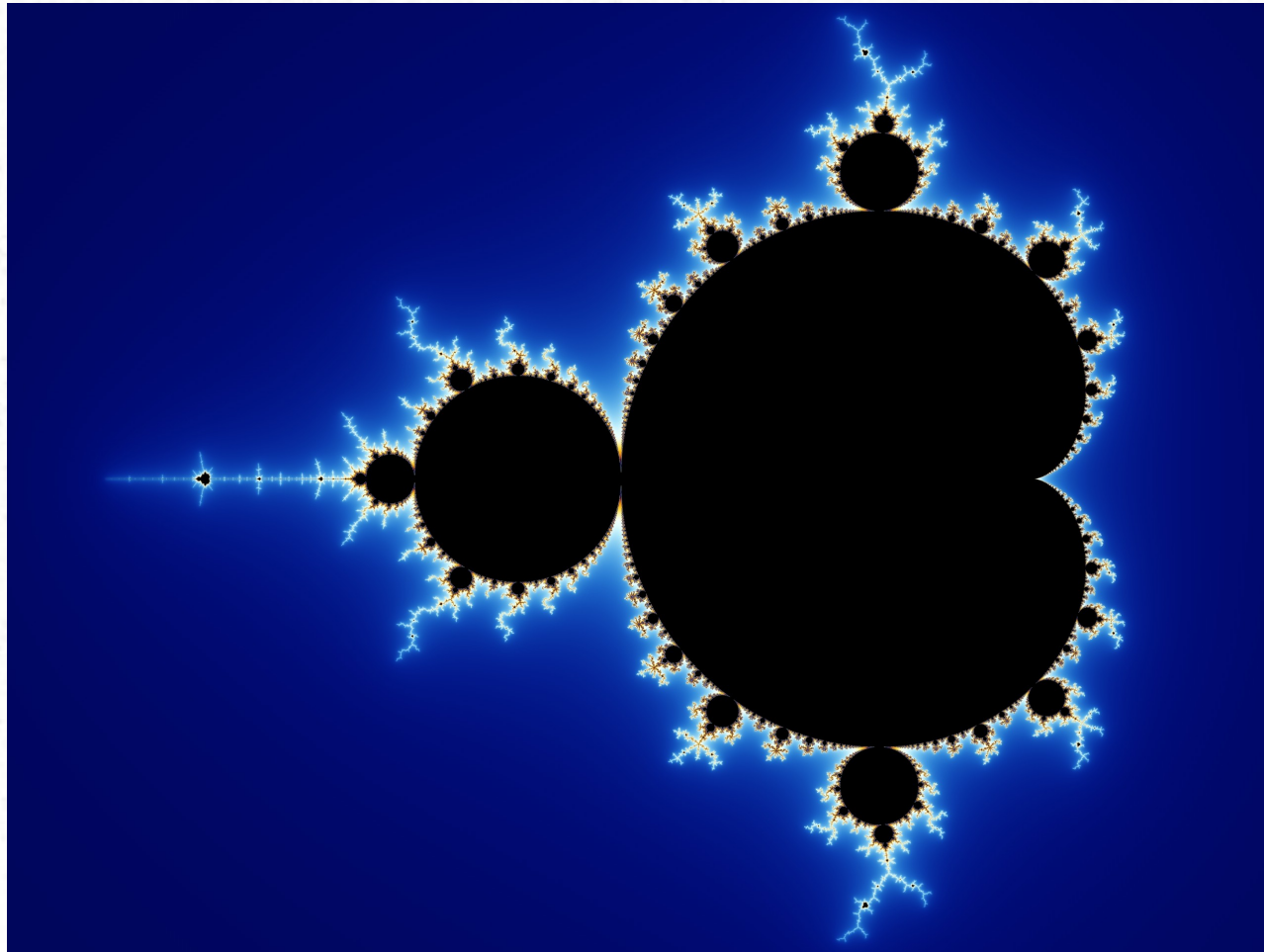


Unit = 50 km,
Length = 3400 km (approx.)

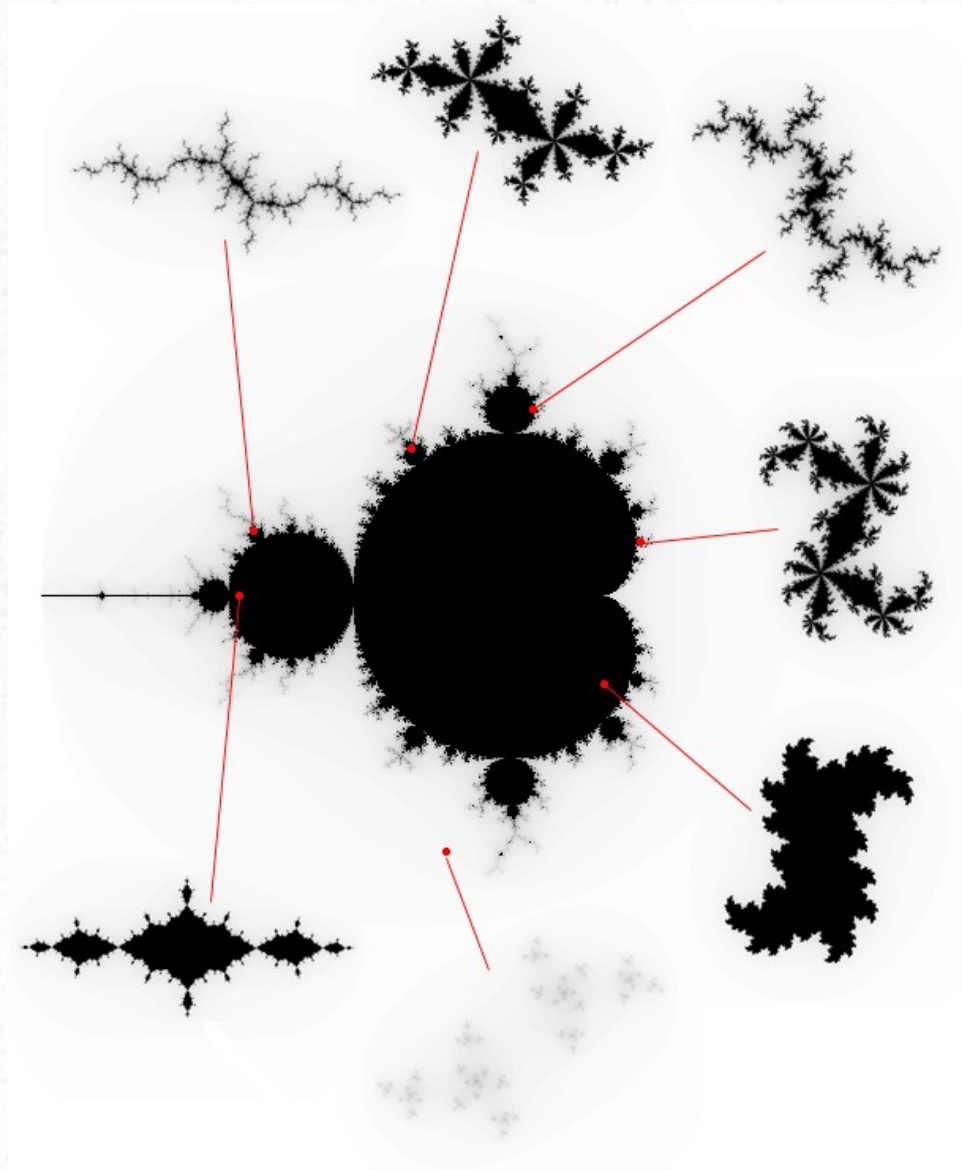
minden határon túl nő

Mandelbrot halmaz

$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$



Mandelbrot halmaz



Fraktál

szabálytalan, csipkézett, töredezett alakzatok, leírásának, számításának, a róluk való gondolkozásnak a megjelölése

Nincs rá teljesen jó definíció.

Tulajdonságok:

- önhasonló (akár statisztikailag, vagy közelítően)
- tetszőlegesen kis skálán is 'finom' a szerkezete
- gyakran rekurzióval (iterációval) kapható meg
- klasszikus geometriai módszerekkel nem írhatók le

Törtdimenziók

szabálytalanság foka \sim mennyire hatékonyan tölti ki a test a teret

Koch görbe pl: “több mint vonal de kevesebb mint sík”

Hausdorff (–Besicovitch) – dimenzió: (1918) \sim fraktáldimenzió

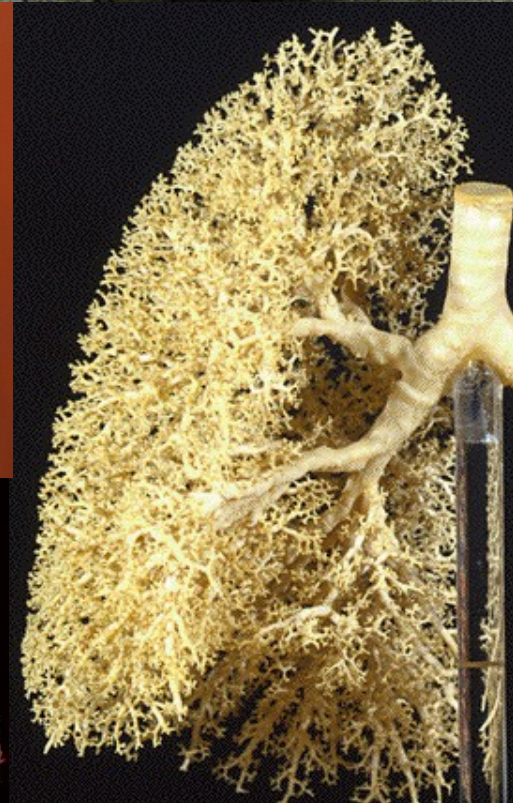
$$D = \ln(\text{önhasznló részek száma}) / \ln(\text{kicsinyítés aránya})$$

- Cantor-halmaz: $\ln(2)/\ln(3)=0.6309$
- Koch-görbe: $\ln(4)/\ln(3)=1.2619$
- Sierpiński-háromszög $\ln(3)/\ln(2) = 1,585$
- Sierpiński-szőnyeg $\ln(8)/\ln(3)=1.8928$
- Sierpiński-szivacs $\ln(4)/\ln(2)=2$
- Menger-szivacs $\ln(20)/\ln(3)=2.7268$
- $z^2 + 0.25$ Julia-halmaz: 1.0812

Fraktálok a természetben



Fraktálok a természetben



Néhány természet fraktál Hausdorff-dimenziója

- Nagy-Britannia partvonala: 1.25
- Norvégia partvonala: 1.52
- Karfiol: 2.33
- Brokkoli: 2.66
- Emberi agy: 2.79
- Tüdő: 2.97

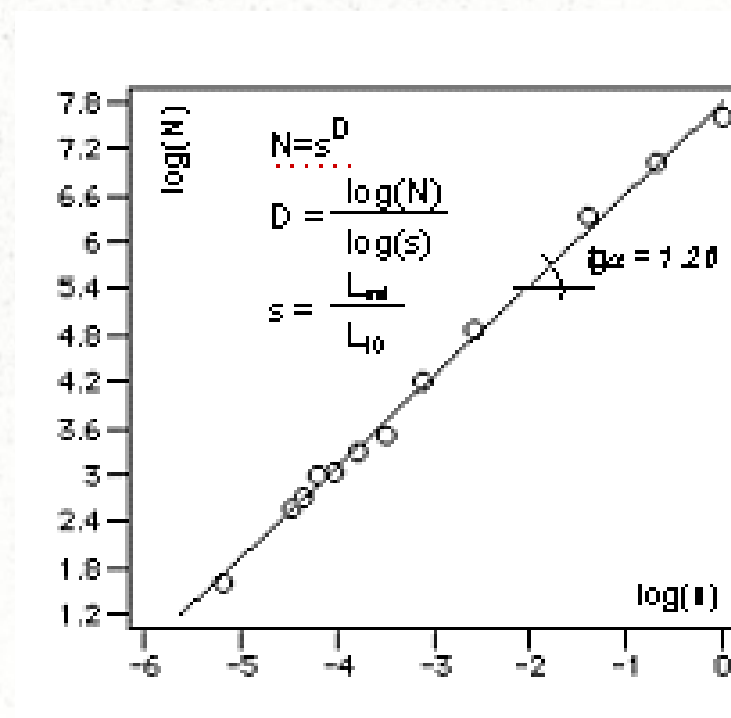
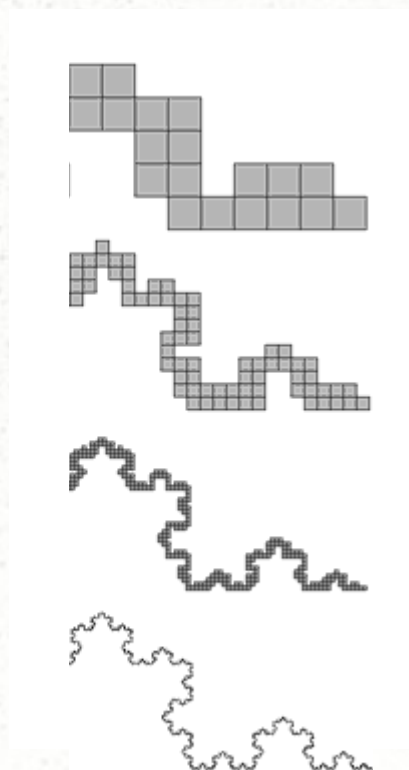
Egyéb fraktáldimenzió

- Box-counting dimenzió (dobozszámlálási vagy cellaszámlálási)

= Minkovszki–Bouligand dimenzió

N: cellák száma

s: cella méretet



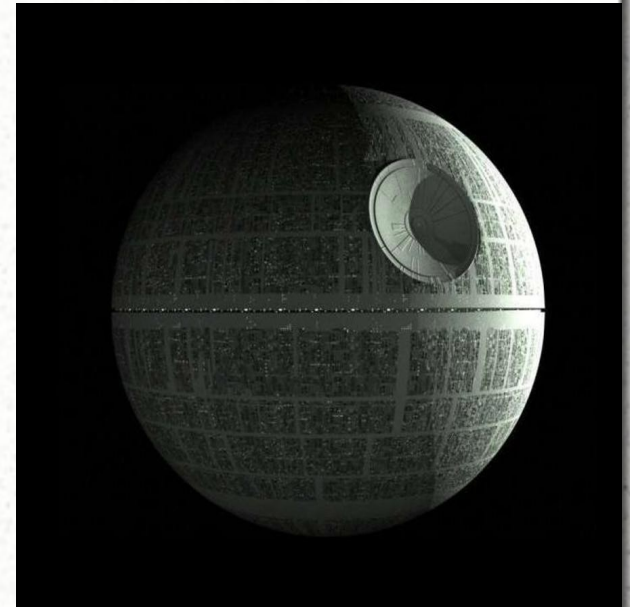
Fraktálok érintkezési felületeken

érintkezést jellemző tulajdonságok függetlenek az anyagtól:
hepehupák hepehupáinak a fraktáljellemzőitől függenek
→ nincsenek mindenütt érintkezésben

összetört csészét nem lehet összerakni



Alkalmazás



- számítógéppel generált földi vagy földön kívüli tájképek
- kartográfia
- képek tömörítése .fif (Fractal Image Format): legjobb tömörítési arány
- lehetséges jövőbeli alkalmazások: hullámtörők, hang- és hőszigetelőanyagok, Föld kéregszerkezet modellezés

DNS kódolás

- 3.2 md információ egység
- 100 000 milliárd sejt az emberi testben, melyeknek tárolnia kell a helyét és a felépítését



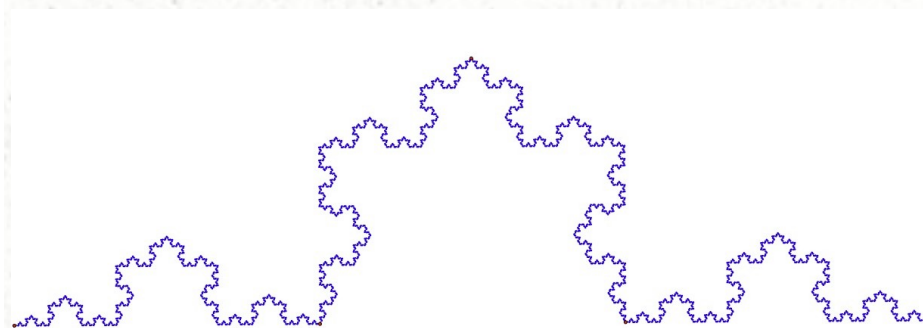
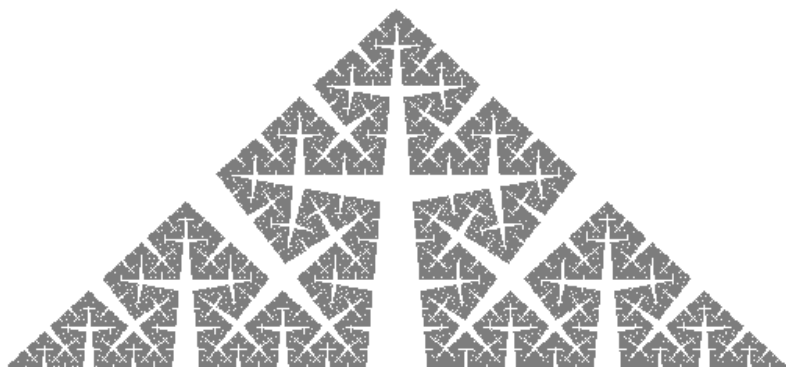
Fraktálok és káosz

- Fraktálok gyakran bonyolult vagy véletlen elemeket is tartalmazó folyamatok eredményeként alakulnak ki.
- Káosszal kapcsolatos fraktálok különlegesek: időbeli viselkedéssel kapcsolatosak, nem tartalmaznak véletlen elemeket, a mozgásegyenletből következnek.
 - a kaotikus mozgás fraktálszerkezete a fázistérben figyelhető meg
 - a megfigyelt fraktálszerkezetből a mozgás kaotikussága következik.
 - minél kaotikusabb a mozgás annál bonyolultabb a fraktálszerkezet

Fraktál feladatok

1. feladat

Melyik a nagyobb? A Cesaro-görbe vagy a Koch-görbe fraktáldimenziója?

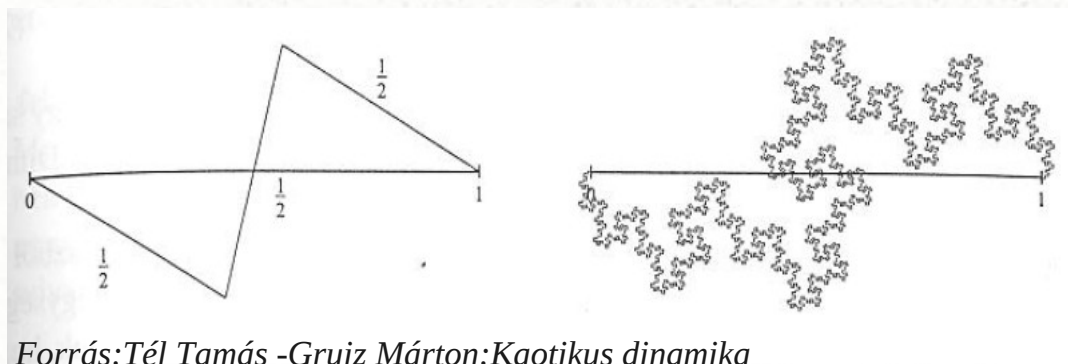


- Önhasonló részek száma: $N_{\text{Cesaro}} = N_{\text{Koch}}$
- Kicsinyítés aránya: $s_{\text{Cesaro}} < s_{\text{Koch}}$
 $\rightarrow \ln(N_{\text{Cesaro}})/\ln(s_{\text{Cesaro}}) > \ln(N_{\text{Koch}})/\ln(s_{\text{Koch}})$

Fraktál feladatok

2. feladat: Adjuk meg az alábbi fraktálok fraktáldimenzióját!

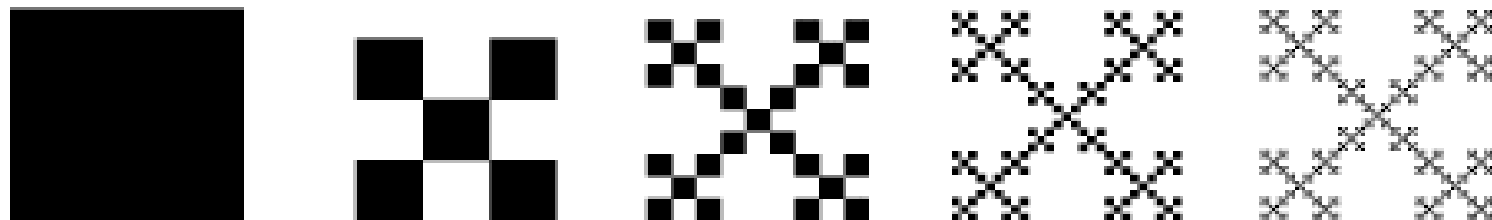
- a) Koch-típusú fraktál



Forrás: Tél Tamás - Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

$$\ln(2)/\ln(3) \approx 1.585$$

- b) hópelyfraktál

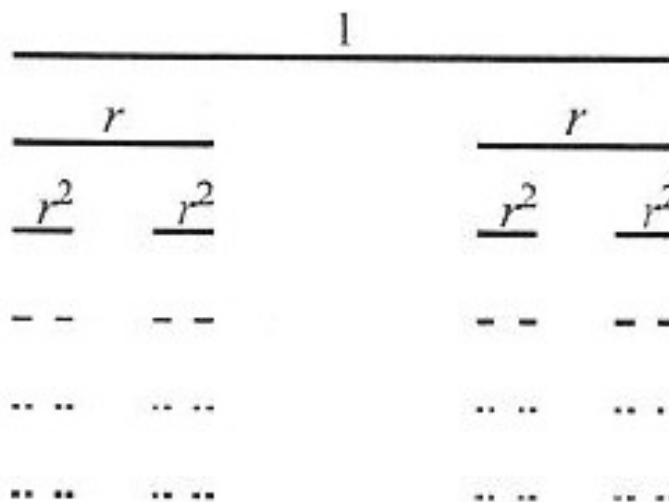


$$\ln(5)/\ln(3) \approx 1.465$$

Fraktál feladatok

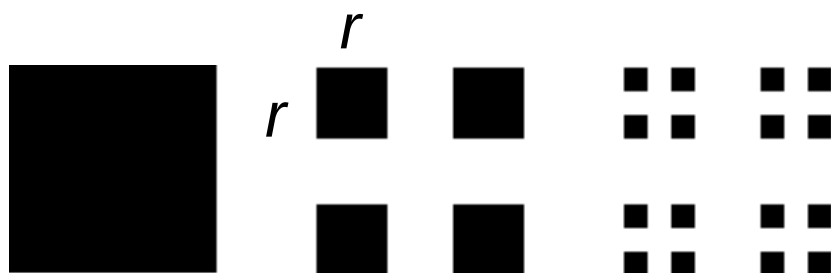
3. feladat: Adjuk meg az alábbi fraktálok fraktáldimenzióját!

- a) Cantor-halmaz



$$\ln(2)/\ln(1/r)$$

- b) Cantor-felhő

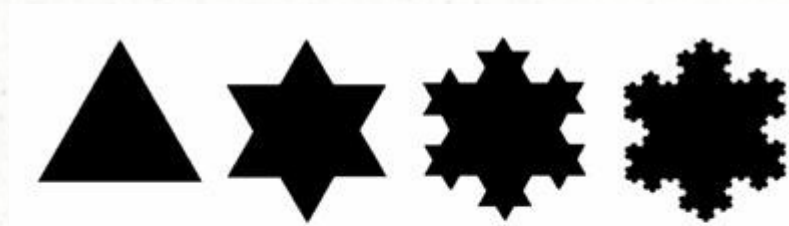


$$\ln(4)/\ln(1/r)$$

Forrás: Tél Tamás - Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

Fraktál feladatok

4. feladat



Mekkora a Koch-hópehely területe?

- 0. lépésben a háromszög területe: T_0
- 1. lépés $T_0 + 3T_0/9$
- 2. lépés $T_0 + 3T_0/9 + 12T_0/81$
- n. lépésben a növekmény $3(4^{n-1})T_0/9^n$
- $T_0 \sum_{n=1}^{\infty} 3(4^{n-1})(9^{-n}) = T_0/3 \sum_{n=0}^{\infty} (4/9)^n$

mértani sor, melynek kvóciense $4/9$

- a területnövekmény: $T_0/(3(1-4/9))$, a teljes terület: $8/5 T_0$

Fraktálok osztályozása ön hasonlóság alapján

- Egzaktul ön hasonlító fraktálok (pl. Koch-hópehely)
 - Egyskálájú N azonos részből áll, mindegyik ugyanazon r faktossal kicsinyített mása az egésznek
 - Többskálájú: N olyan részből áll, melyek mindegyike valamely $r_j < 1$ ($j=1,2,3..$) faktossal kicsinyített mása az egésznek

$$\text{dimenziója: } \sum r_j^D = 1$$

- Kvázi ön hasonlító fraktálok (pl. Mandelbrot halmaz)
- Statisztikailag ön hasonlók (partvonalak)
- Összevetített fraktálok: 2 egyszerűbb fraktál összevetítéséből
dimenziójuk az egyes összetevők dimenzióinak összege:

$$D = D_1 + D_2$$

Fraktál feladatok

5. feladat: Adjuk meg az alábbi kétskálájú fraktálok fraktáldimenzióját!

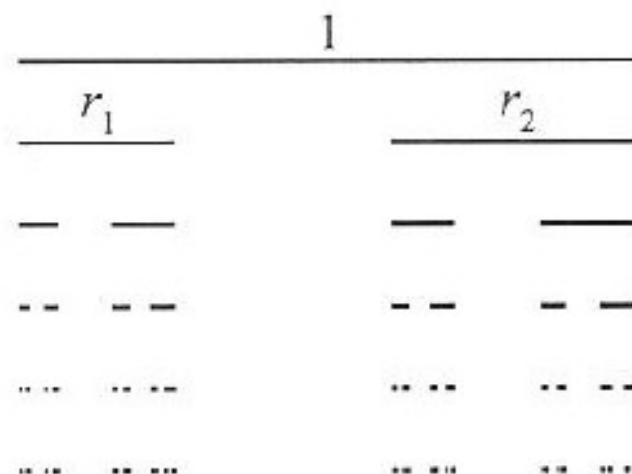
a) kétskálájú Cantor-halmaz

$$r_1=0.25$$

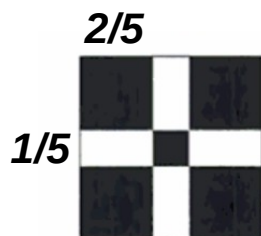
$$r_2=0.4$$

$$0.25^D + 0.4^D = 1$$

Numerikus megoldás: $D=0.605$



b) kétskálájú hópehelyfraktál



$$4(2/5)^D + (1/5)^D = 1$$

Numerikus megoldás: $D=1.601$

Forrás: Tél Tamás - Gruiz Márton: Kaotikus dinamika

Fraktál feladatok

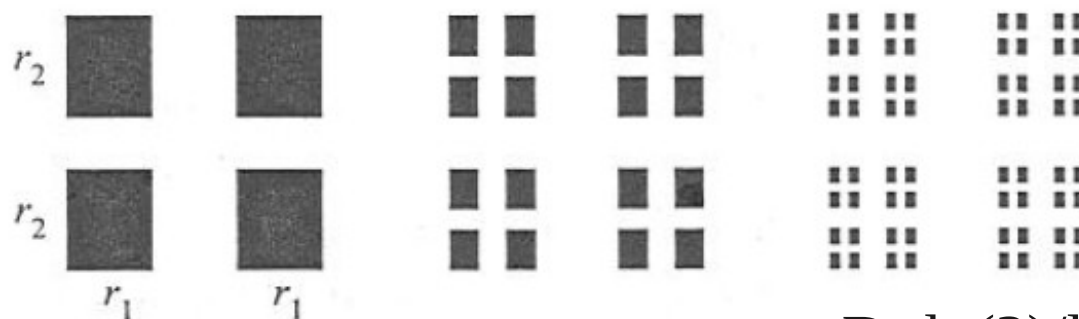
6. feladat: Adjuk meg az alábbi összevetített fraktálok fraktáldimenzióját!

a) Cantor-szálak

$$D=1+\ln(2)/\ln(1/r)$$



b) asszimmetrikus Cantor-felhő



$$D=\ln(2)/\ln(1/r_1)+\ln(2)/\ln(1/r_1)$$

Newton-módszer

(Newton–Raphson-módszer)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

valós függvények esetén gyökök közelítésére használható numerikus módszer

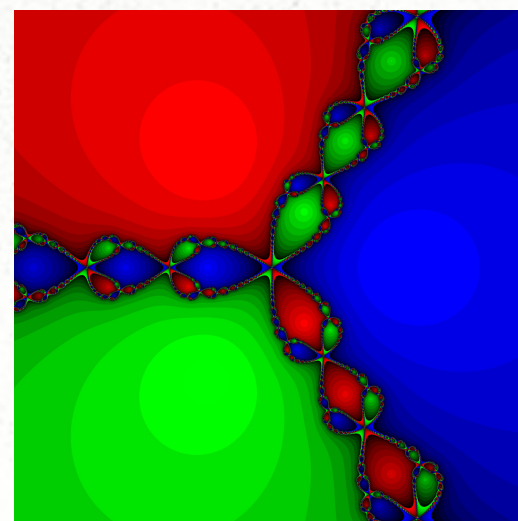
gyorsan konvergál, ha az iteráció a kívánt gyökhöz elég közelről indul.

John Hubbard matematikus (1985)

pl. $x^3-1=0$

vonzási medencék fraktál határvonalakkal

különböző pontokból hogyan vezet el a lehetséges megoldásokhoz



Fraktális medencehatárok

80-as évek

James Yorke: “képzeletbeli flipper”

nincs benne flipper, csak két lyuk

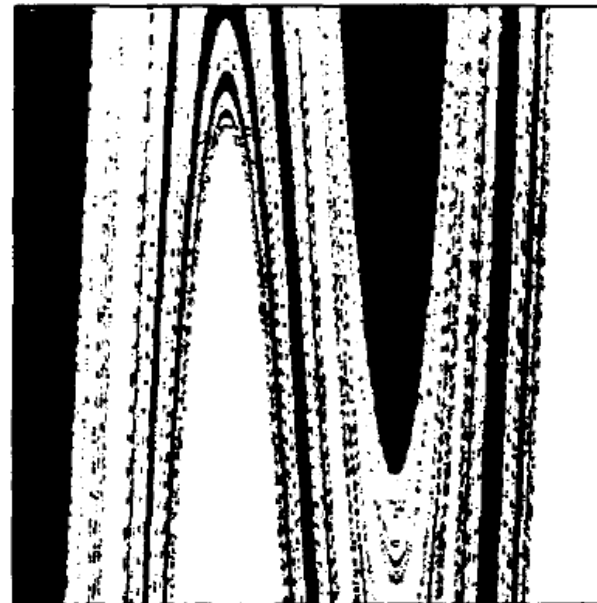
egy paraméter határozza meg a végzetet:
a fogantyú kezdőhelyzete

tf. ha kicsit húzzuk jobbra, ha nagyot balra megy

átmeneti részen nem lehet tudni

→ fraktálhalmaz, nem önazonos, de végtelen sok részletet tartalmaz

még ha a dinamikai rendszer hosszútávon nem is kaotikus, két állapot közötti határon feltűnhet a káosz



James A. Yorke

Páfrány

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

w	a	b	c	d	e	f	p
f_1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
f_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
f_3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
f_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

Michael Barnsley (1993)

- $f_1: x_{n+1} = 0,$
 $y_{n+1} = 0.16 y_n$
- $f_2: x_{n+1} = 0.85 x_n + 0.04 y_n,$
 $y_{n+1} = -0.04 x_n + 0.85 y_n + 1.6$
- $f_3: x_{n+1} = 0.2 x_n - 0.26 y_n,$
 $y_{n+1} = 0.23 x_n + 0.22 y_n + 1.6$
- $f_4: x_{n+1} = -0.15 x_n + 0.28 y_n,$
 $y_{n+1} = 0.26 x_n + 0.24 y_n + 0.44$



Turbulencia

nyugodt sima áramlás egyszer csak örvényekre bomlik

kis mozgások gyorsan energiát szívnak el a nagy mozgásoktól, miért?

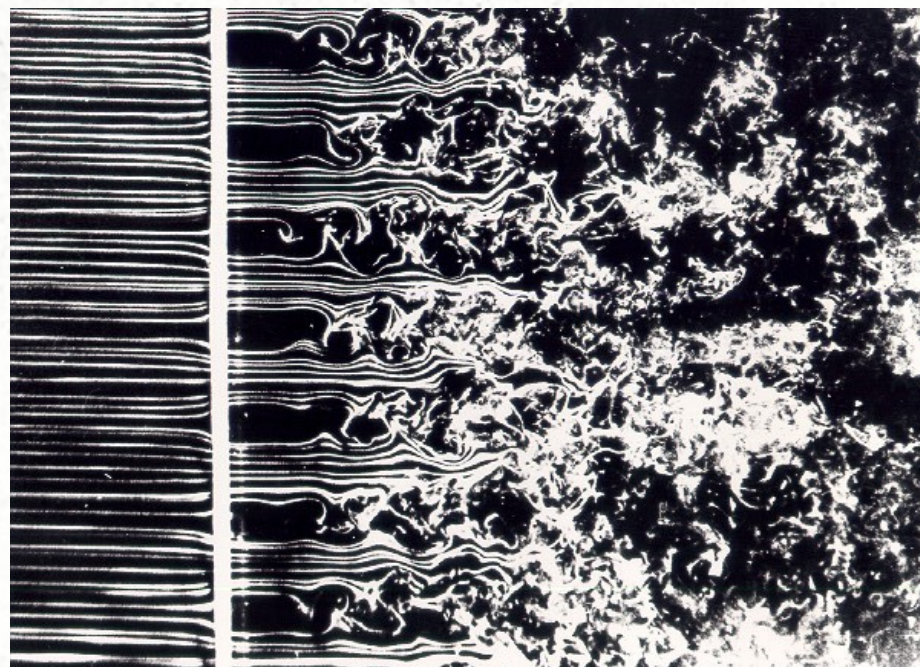
műszaki tudományok:

turbulencia érdekes abból a szempontból, hogy hogyan lehetne tőle megszabadulni

- folyadékban, levegőben mozgó járművek tervezése
- szívbillentyűk körüli áramlás
- robbanások alakja és időbeli fejlődése
- örvényekkel, lángokkal és lökéshullámokkal kapcsolatos rengeteg kérdés

Turbulencia

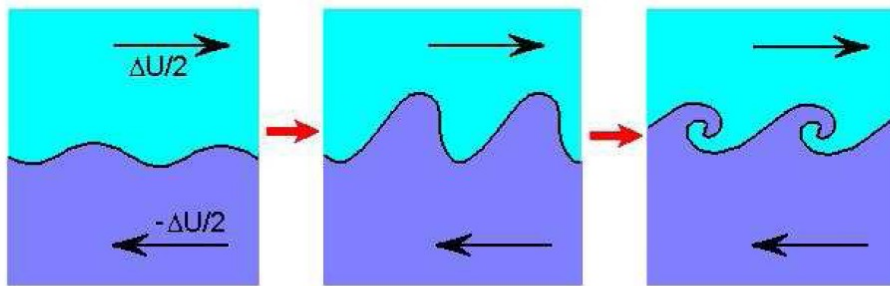
- rendezetlenség minden mérettartományban
- kis örvények nagy örvényekben
- instabilitás
- nagyfokú disszipativitás
- elviszi az energiát
- ellenállást kelt
- véletlenszerűségbe fordul



Kelvin-Helmholtz instabilitás



Szaturnusz



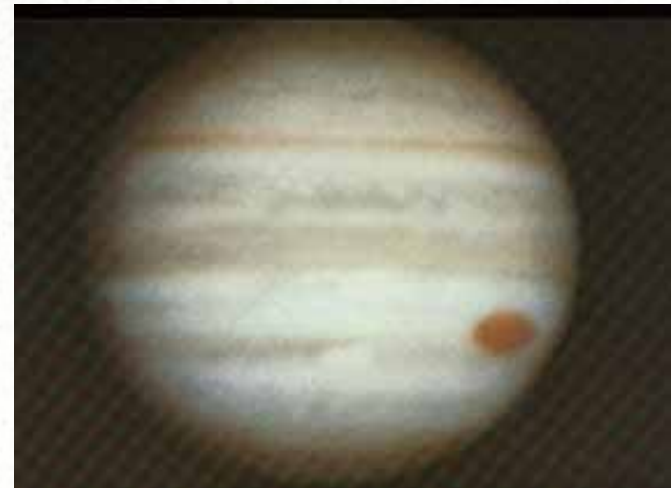
különböző sűrűségű és sebességű rétegek határán: időszakos jelenség

Jupiter nagy vörös foltja

1600-as évek Galilei

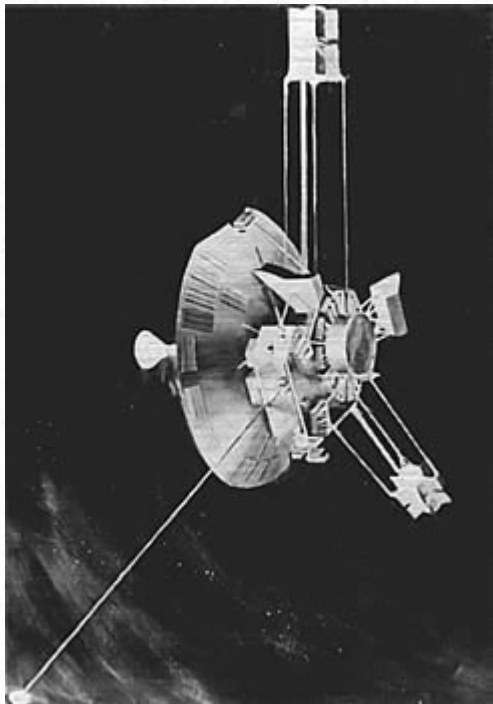
Elméletek:

- lávaömlés-elmélet (19. sz. vége): hatalmas ovális tó olvadt lávából, (kisbolygó ütött a vékony szilárd kérgen lyukat, ebből ömlött)
- új hold-elmélet: éppen felemelkedik a felszínről
- tojás-elmélet: (kicsit elmozdulni látszott 1939), szilárd test úszik a légkörben mint tojás a vízben (változatok: H vagy He buborék)
- Gázoszlop-elmélet (60-as évek): kráterből kiáramló gázoszlop



Jupiter nagy vörös foltja

- 1974 Pioneer-11



Jupiter nagy vörös foltja

- 1979 Voyager-1:



turbulencia egy egészen új mérettartományban

Jupiter nagy vörös foltja

~ hurrikán (trópusi ciklon)

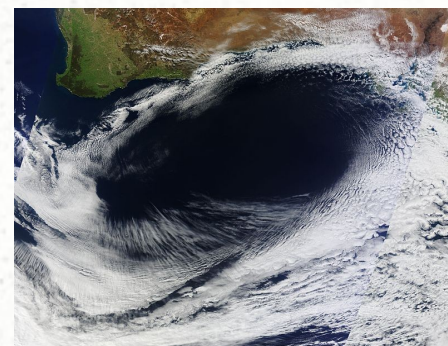
de anticiklonális irányú és nem tűnik el

mi tartja működésbe és mi tartja a helyén?

a bolygó teljesen egészében mozgó folyadék
(szilárd bolygóra számítottak vékony légkörrel)

földi távcsövekkel nem látható kis
mérettartományokban gyorsan eltűnő áramlások

sajátos meteorológia jelenség: blocking (nagynyomású rendszer ül
a tenger felett a parttól nem messze, lassan forog hónapokon át
dacolva az áramlással)



Jupiter nagy vörös foltja

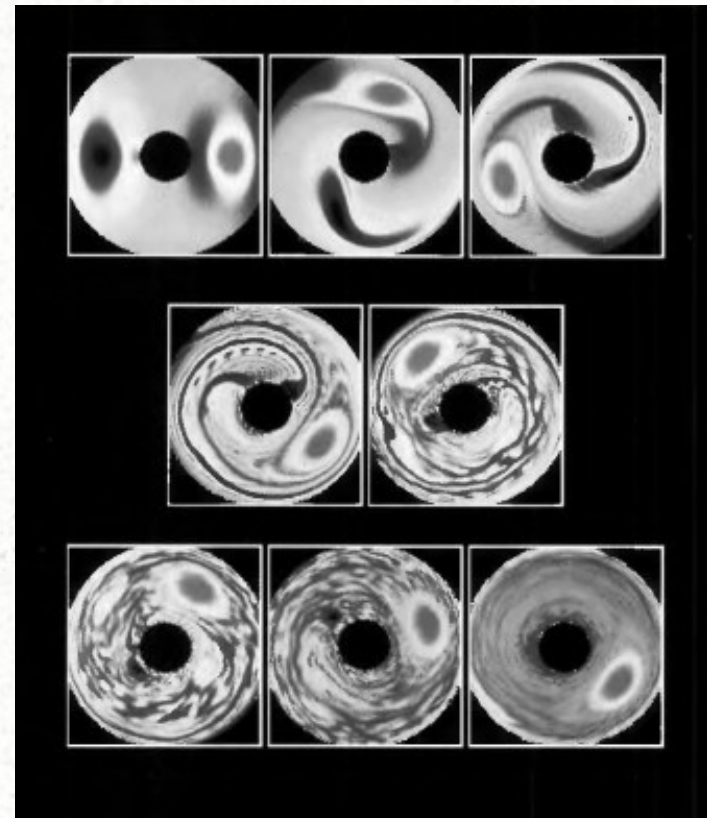
Szimulációk:

Philip Marcus
(University of California, Berkeley)

ciklonok kiindulási helytől függetlenül
felbomlanak

anticiklonok egyetlen foltba egyesülnek,
ami állandó és összefüggő marad

→ stabil káosz

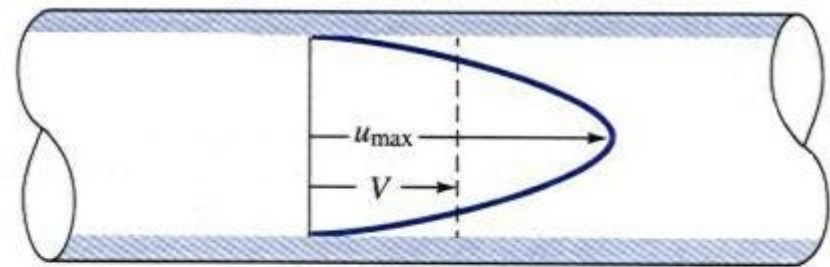
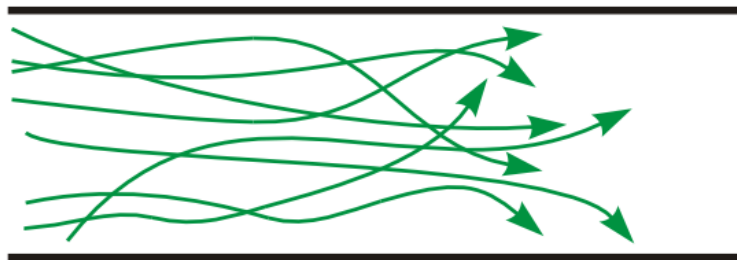


- 2013: függőleges sebességek figyelembevételével → 800 évig fennmarad

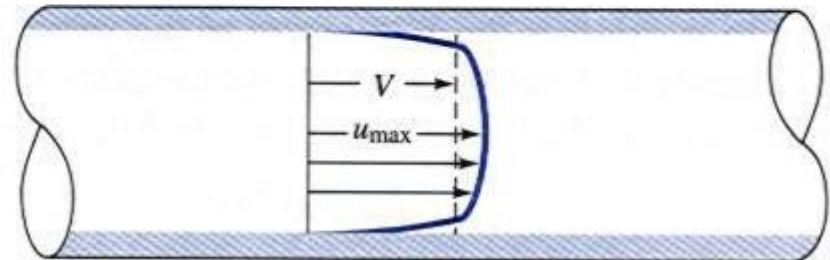
Viszkózus folyadékok áramlása

(belső surlódás nem elhanyagolható)

lamináris és turbulens áramlás sebességprofilja



(a)



(b)

A turbulencia leírása

A súrlódó folyadék mozgásegyenlete:

Navier-Stokes egyenlet (1840-es évek)

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

Reynolds-szám (1895): $Re = lv/\nu$

(áramlási sebesség * jellemző hossz méret / kinematikai viszkozitás)

kritikus Reynolds-szám felett → turbulens

Bifurkáció a mozgás minőségében

A turbulencia Kolgomorov elmélete

Kolgomorov matematikai leírás (1941):

- energiatartományok sorozata egyre kisebb és kisebb mérettartományokon át.
- végül olyan pici örvények, hogy a viszkozitás hatása nagyobb lesz
- feltevés: örvények kitöltik az egész folyadékteret, homogén, izotróp

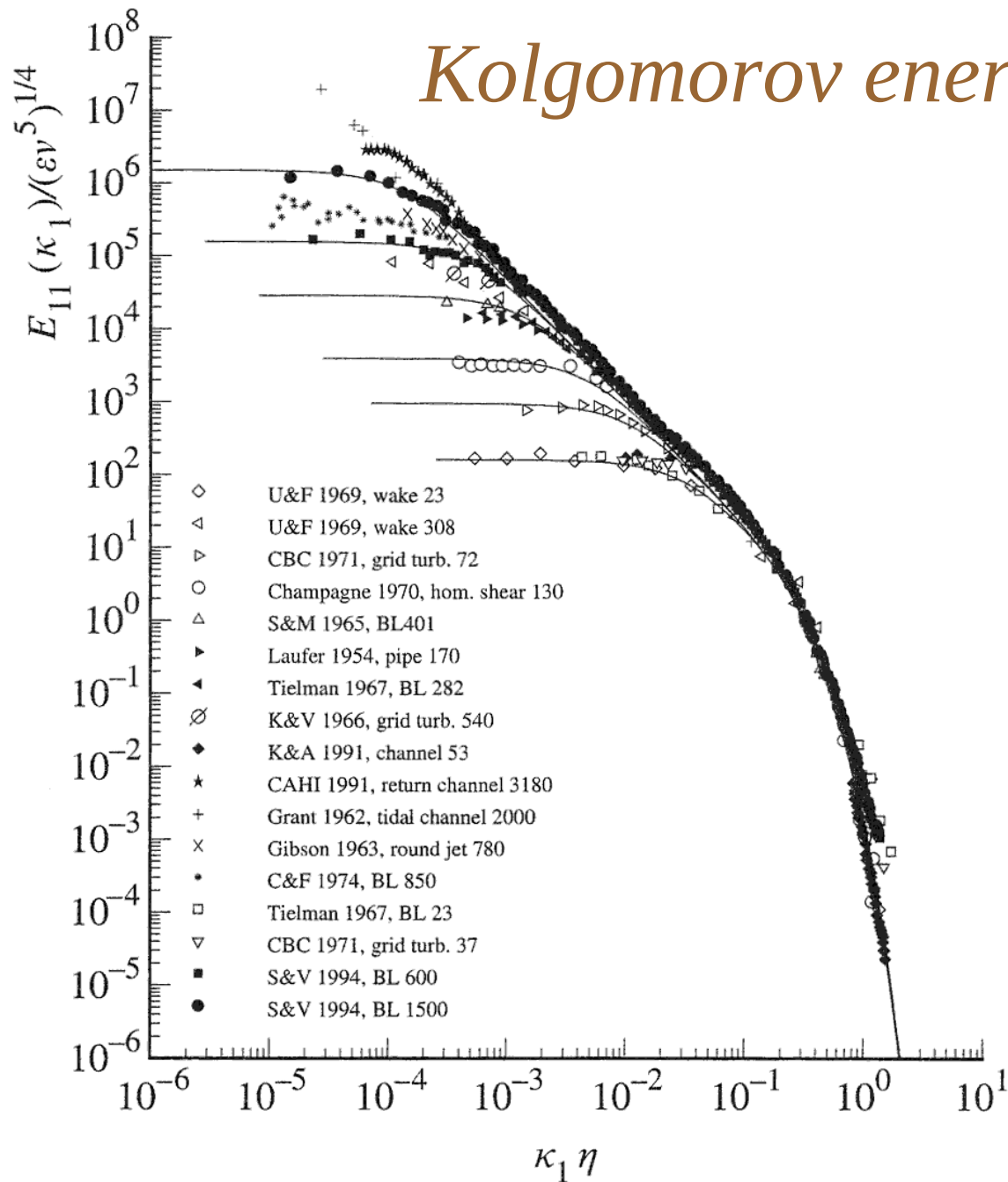
skálatörvény: $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ legkisebb skála

energiaspektrum: $E(k, \epsilon) = Ck^{-5/3}\epsilon^{2/3}$

k: hullámszám, ϵ : disszipációs ráta

↔ valójában nyugodt területek vannak benne

Kolgomorov energiaspektrum



Turbulencia a napszélben

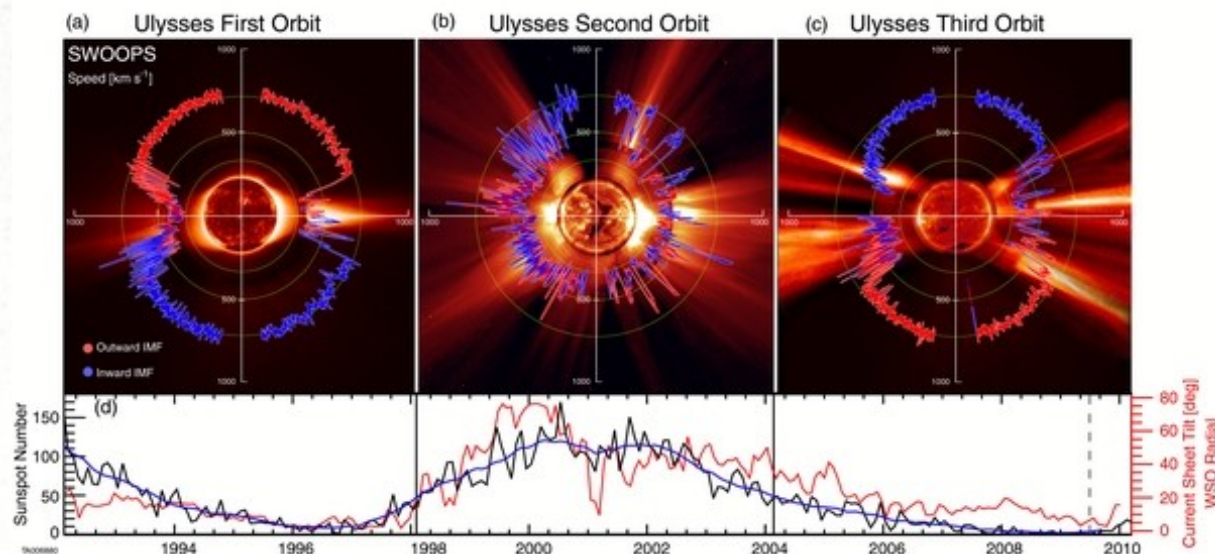


Ulysses napszél mérés 1994-1995

(poláris pálya) több meglepő eredmény

pl. a pólus felé nem nő a mágneses térerősség
fraktálstruktúra a mágneses térben → plazma turbulencia
(magas szélességeken is)

Kolgomorov spektrumú fluktuációk (↔ mágnesezett folyadék $\sim k^{-2/3}$)



A turbulencia Landau-Hopf elmélete

Landau (1944) - Hopf (1948) elmélet
(általánosan elfogadott volt)

- ha több energia jön rendszerbe újabb frekvenciák jelennek meg és ez összeegyeztethetetlen a meglévőkkel
- instabil új mozgások egymásba torlódnak, egymást fedik

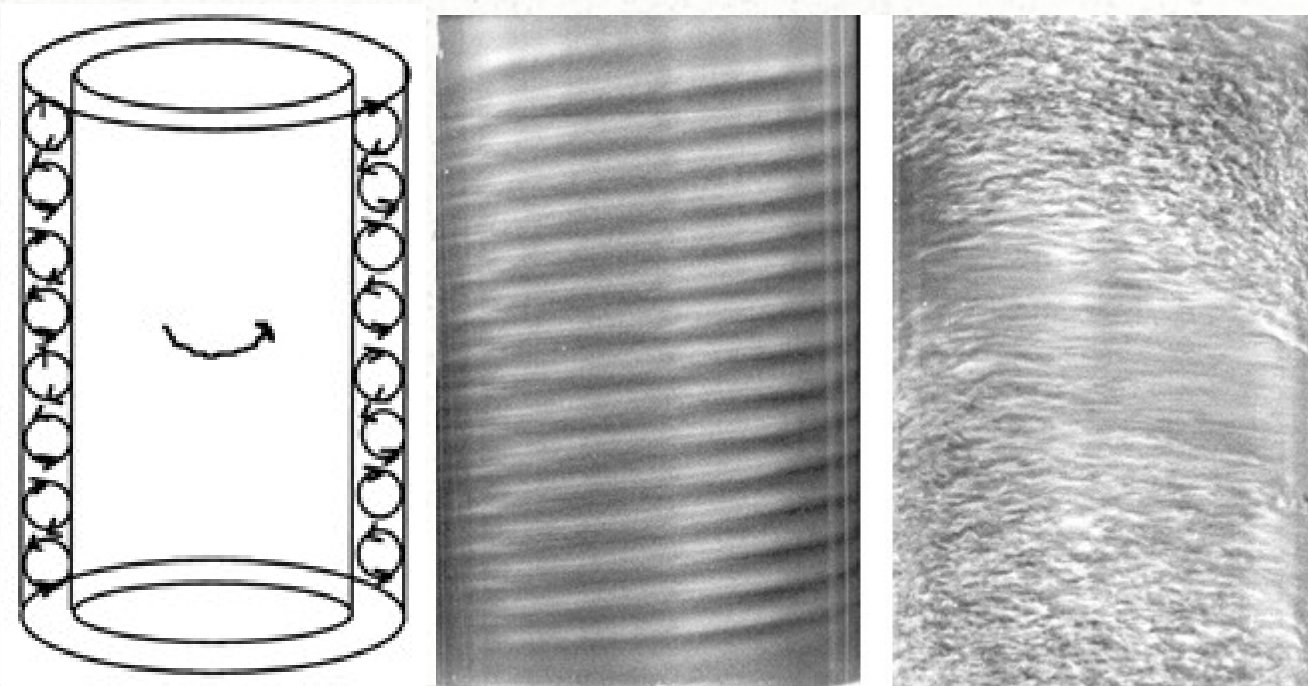
Gollub & Swinney kísérlete

1975 Harry Swinney és Jerry Gollub (fázisátalakulás tanulmányozása)

kísérlet: (turbulencia kvalitatív vizsgálatának kezdete)

Landau elképzelés igazolására

Taylor–Couette áramlás lézeres Doppler-interferometria mérés
vízen átragyogó sugár elhajlott vagy szóródott



Gollub & Swinney kísérlete

megvizsgálták az átmenet hol lép be,

→ az első jól meghatározható

→ következő átmenetnél azonban teljesen zavaros lett

nincs új frekvencia

megszakadt a Landau sorozat

Ruelle & Takens: “Különös attraktor”

David Ruelle belga fizikus

Floris Takens holland matematikus

1971 A turbulencia természete – Comm. Math. Phys. 20, 167

nincs-e másfajta attraktor, ami stabil dinamikai rendszer végállapotát ábrázolja, nem túl nagy dimenziószámú és nem periodikus?

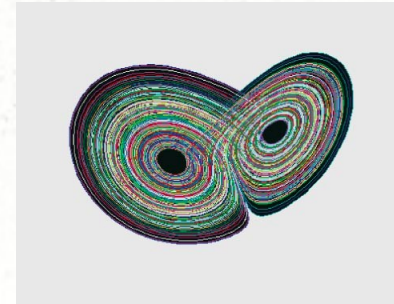
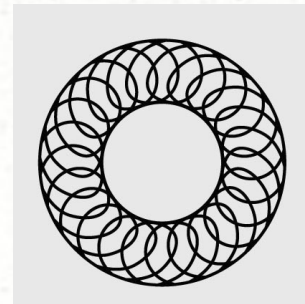
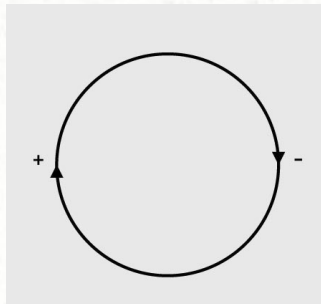
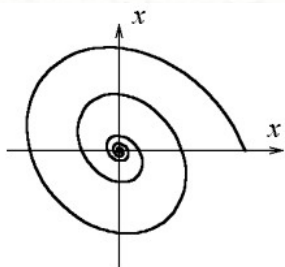
Navier-Stokes egyenlet \rightarrow trajektóriák aszimptotikusan egy bonyolult struktúrájú kompakt halmaz felé tartanak

turbulencia = “különös attraktoral” rendelkező dinamika

\rightarrow végtelen hosszú trajektória véges területen = fraktál

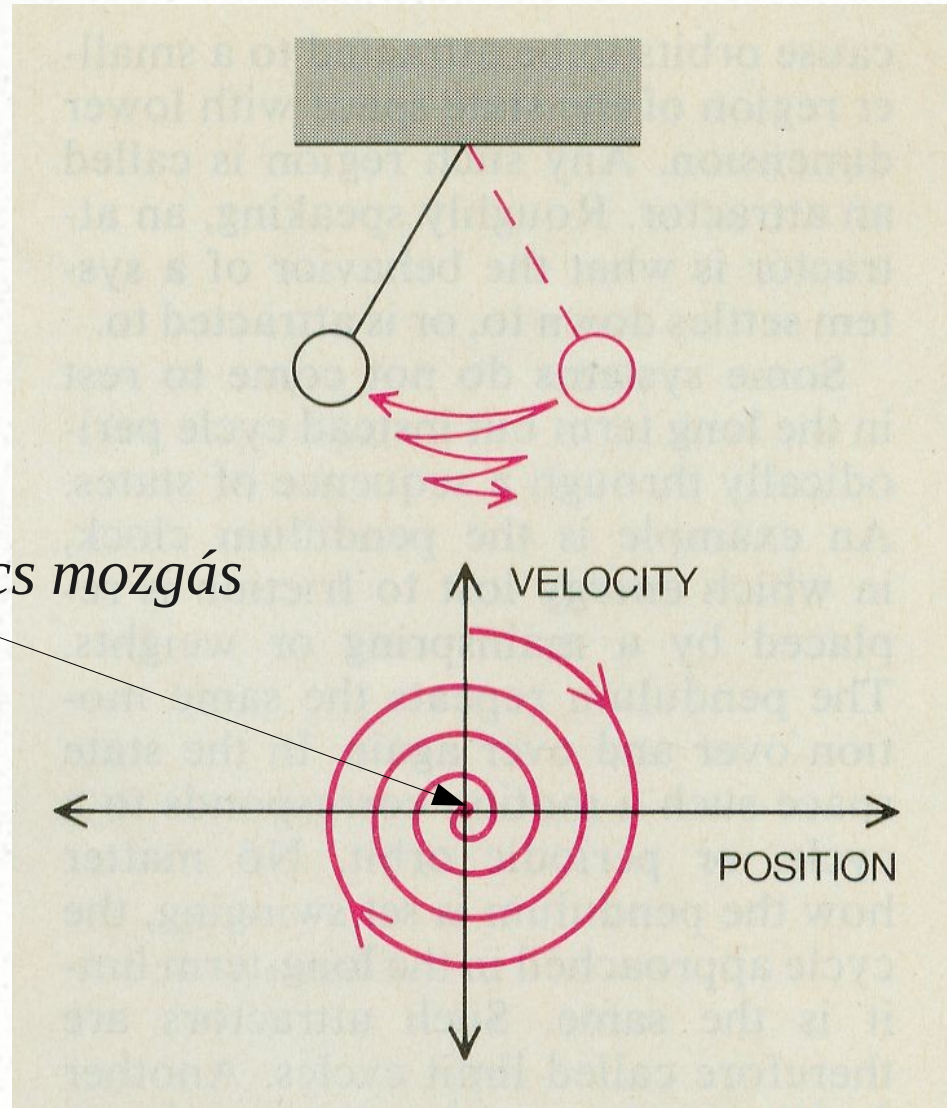
Attraktor

- Disszipatív fázisterében mindig létezik egy, az állapotpontok trajektóriáit vonzó, és az állandósult viselkedésre jellemző halmaz; ezt a rendszer attraktorának nevezzük.
- típusok:
 - pontattraktor (fix pont)
 - periodikus attraktor (határciklus)
 - kvázi-periodikus állapotváltozásoknál: tórusz attraktor
 - különös attraktor

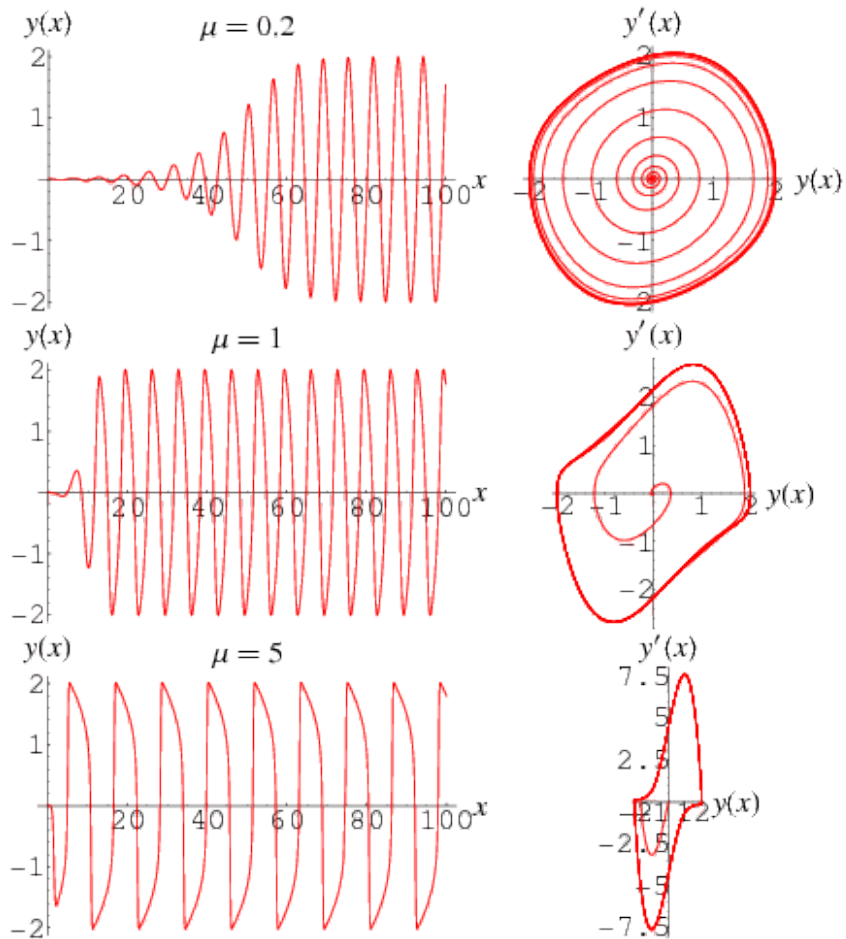


Fixpont

Fixpont: nincs mozgás

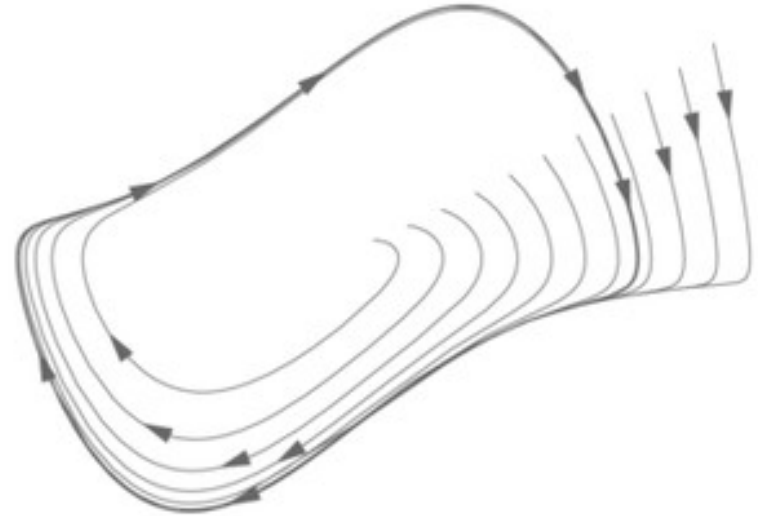


Határciklus



Forrás: Wolfram MathWorld

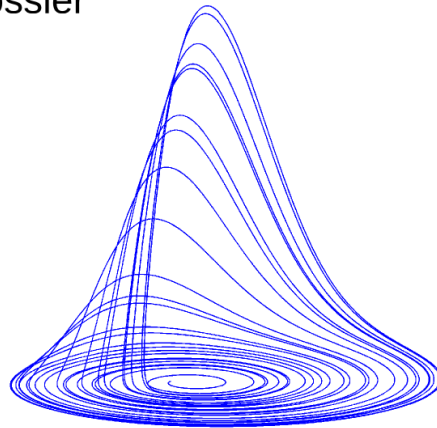
periodikus mozgás



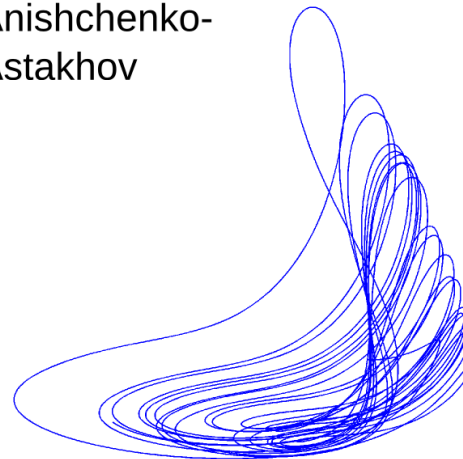
van der Pol-oszcillátor példája

Különös attraktor

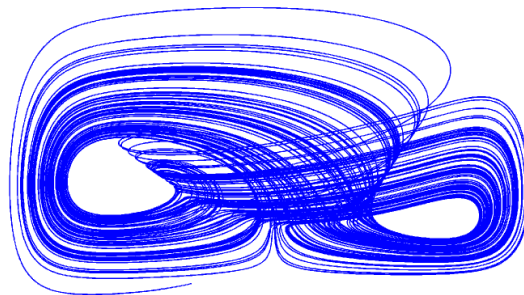
Rössler



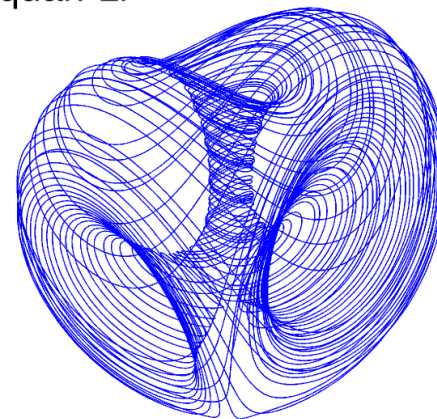
Anishchenko-
Astakhov



Yu-Wang



Dequan-Li



Rössler attraktor

Otto Rössler 1976



$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

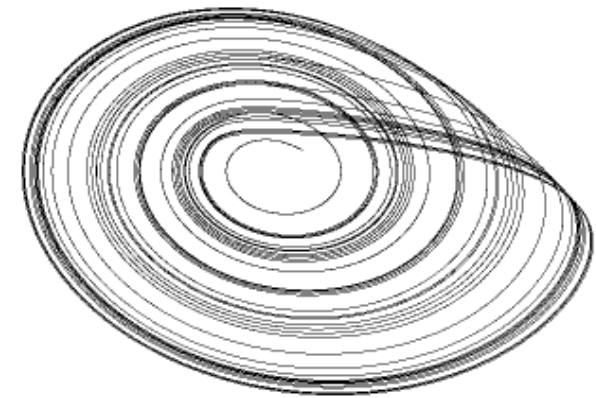
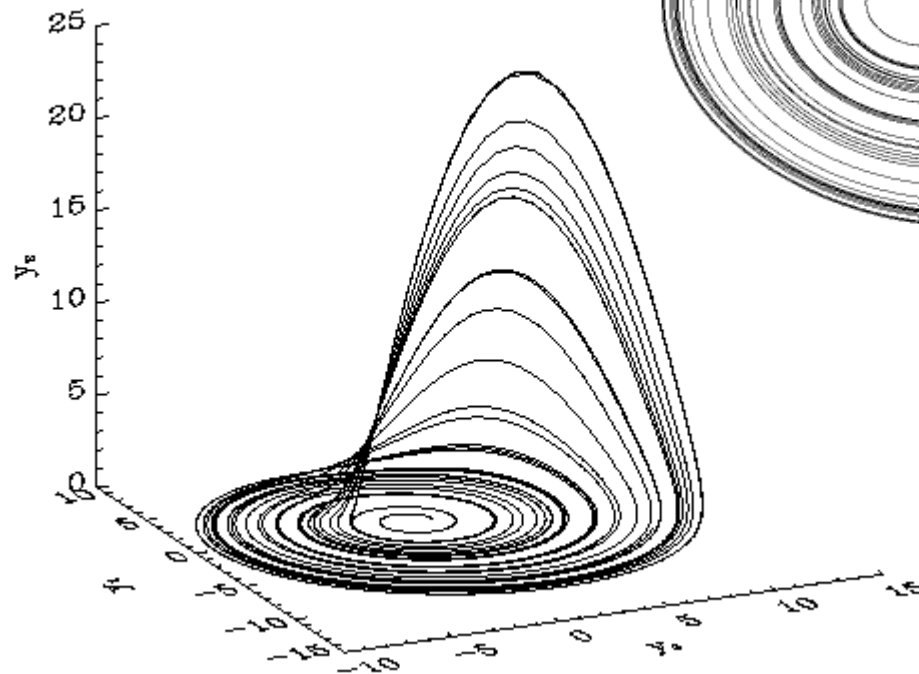
$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = a + z(x - c)$$

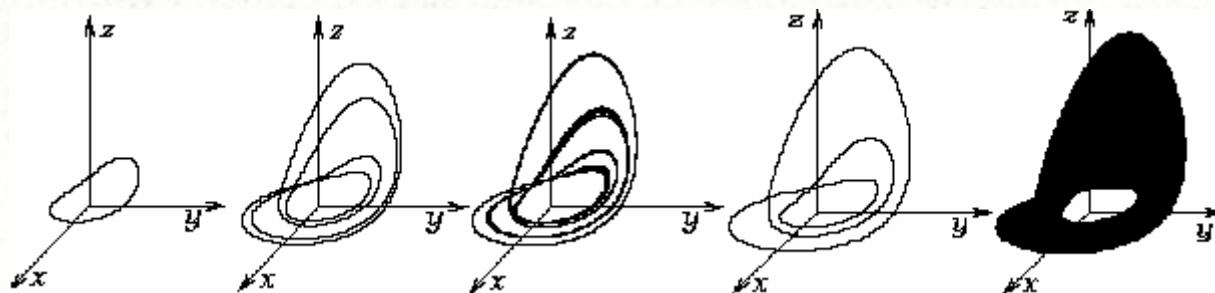
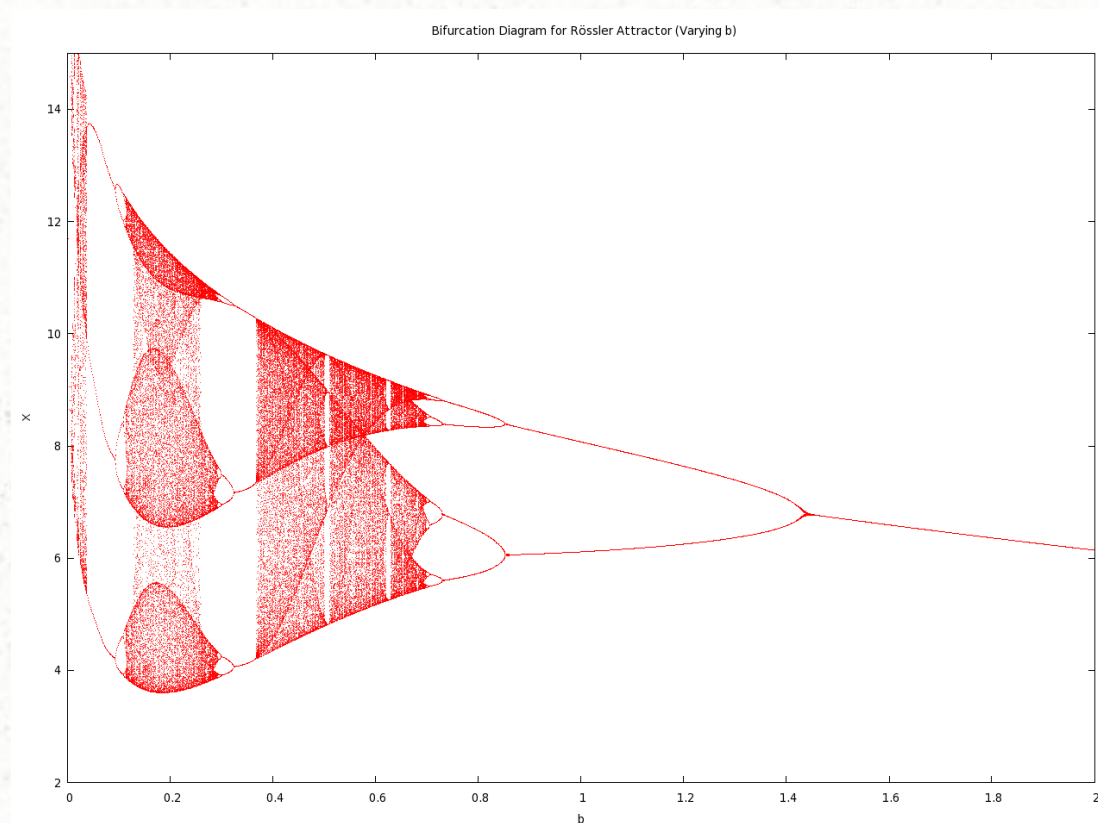
$$a=0.2$$

$$b=0.2$$

$$c=14$$



Rössler attraktor bifurkációs diagramja b változó szerint

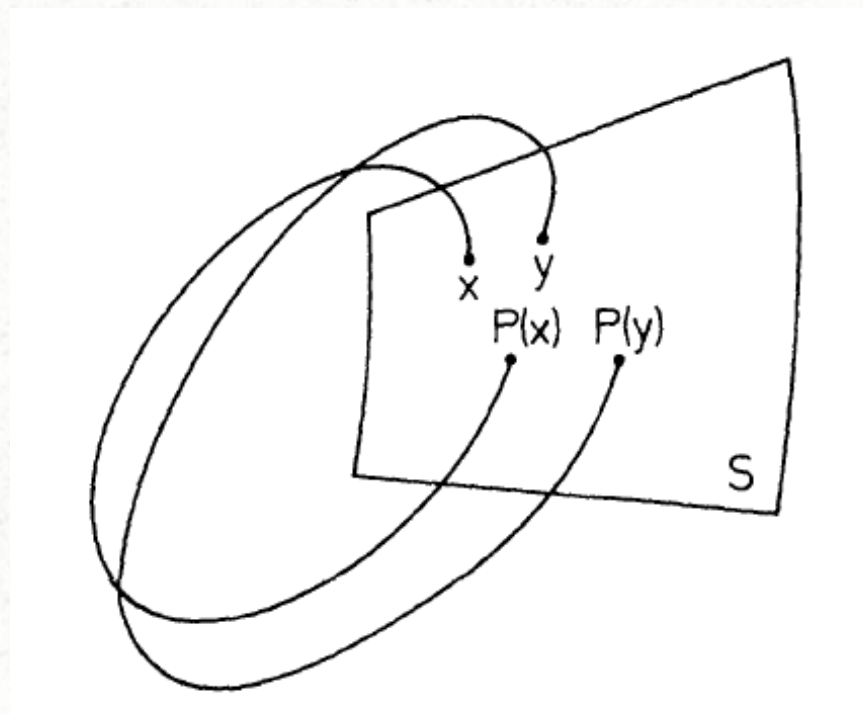


Poincaré-metszet

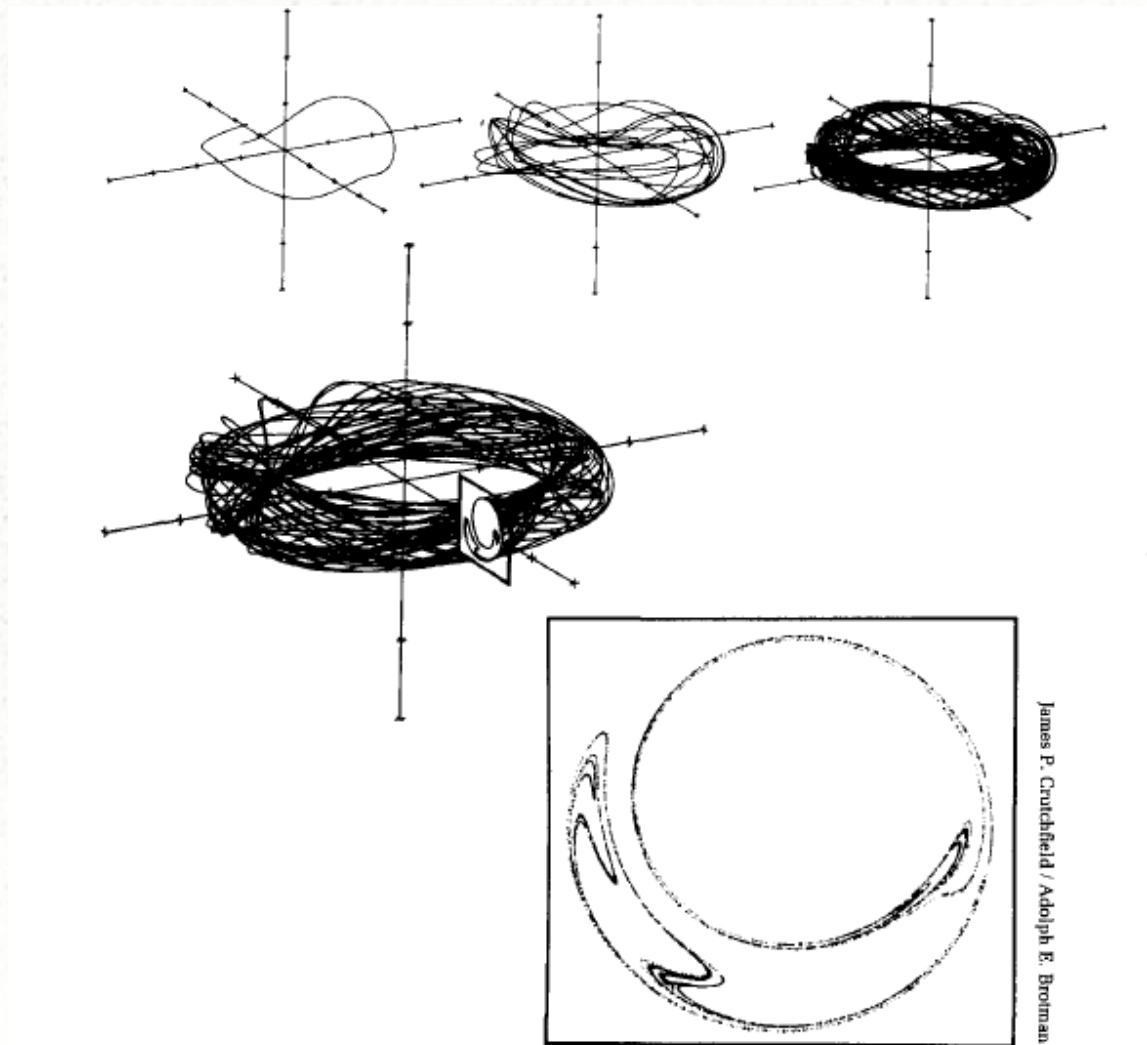
visszatérési térkép

trajetória metszet

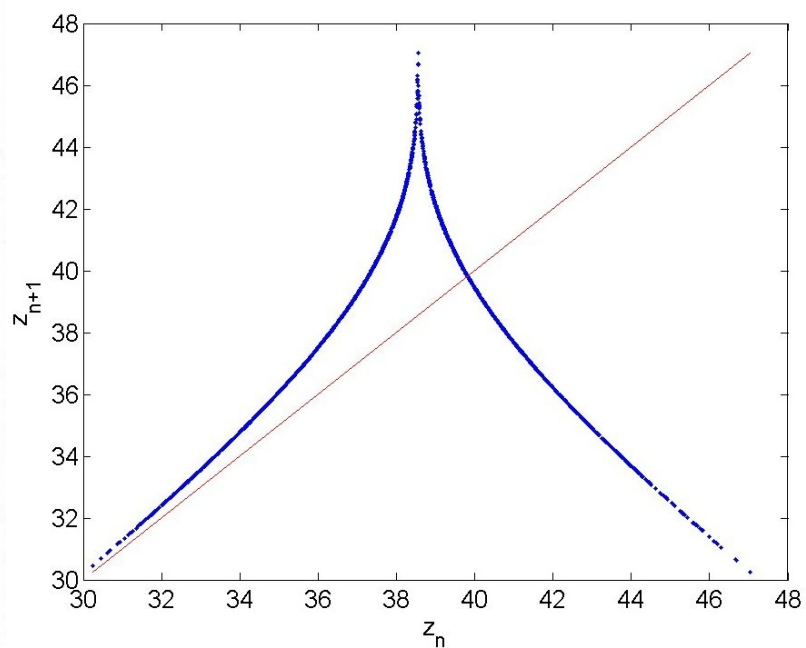
elveszünk egy dimenziót



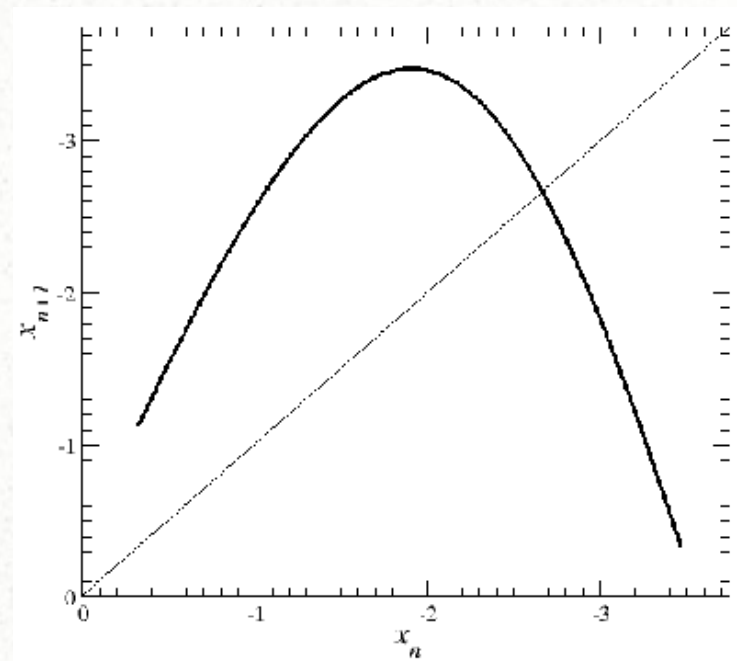
Poincaré-metszet



Poincaré-metszetek

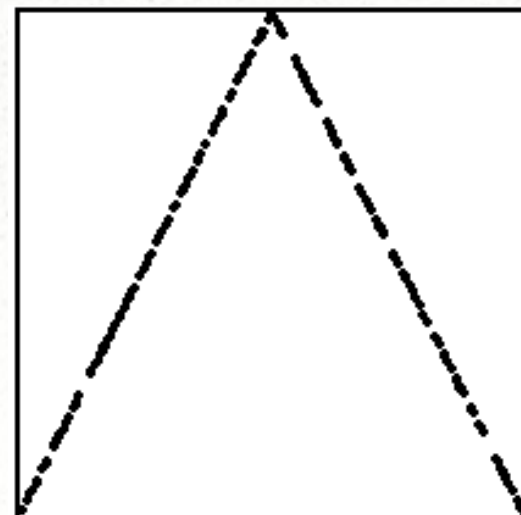
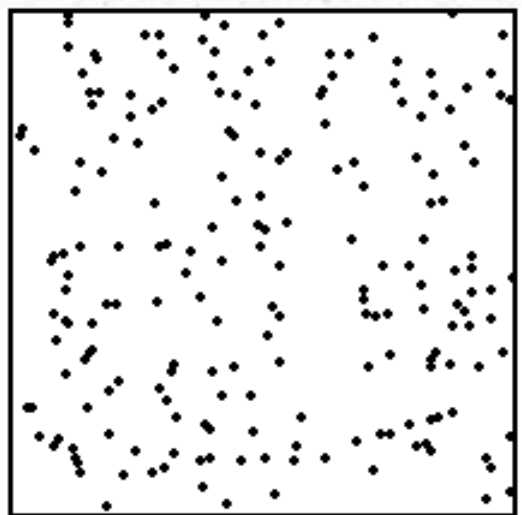
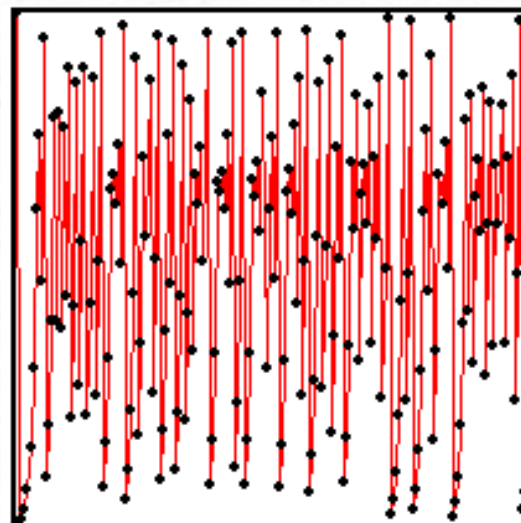
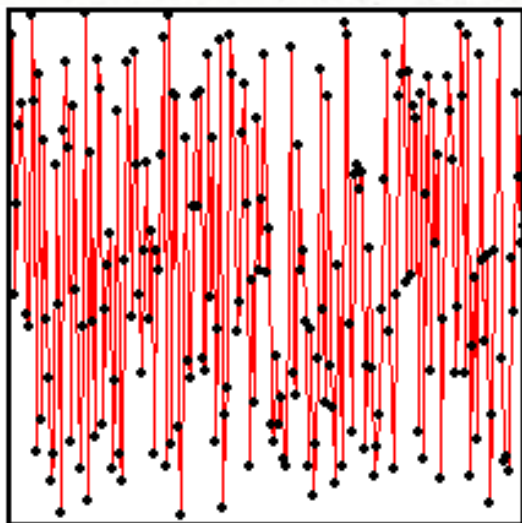


Lorenz-attraktor



Rössler-attraktor

sztohasztikus \leftrightarrow *kaotikus*



Michel Hénon (1931-2013)

francia matematikus és csillagász

gömbhalmazok dinamikája: N-test szimuláció

meglepően sűrű, 10 ezer - 50 millió tag

tömegközépponttal bíró átlagos gravitációs térben mozog

1960 Hénon doktori disszertáció

megközelítések során szökési
sebességet elérhetik,
ilyenkor a halmaz összehúzódik

→ összeomlik



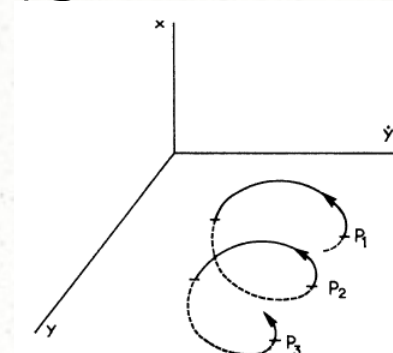
Hénon-Heiles probléma

1964 Henon & Heiles, Astronomical Journal, 69, 73

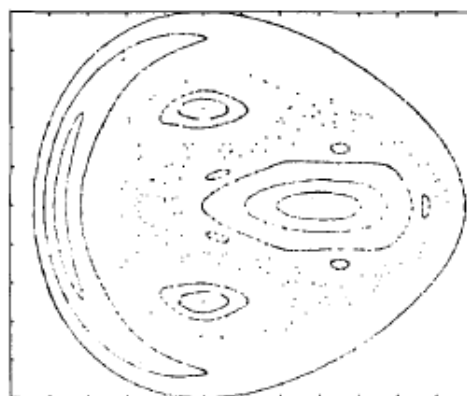
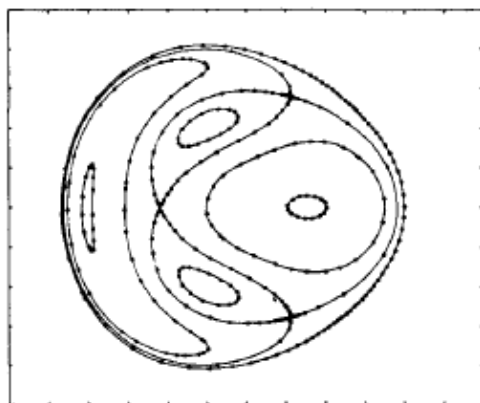
galaktikus pályák modellezése

korong alakú gravitációs forrás

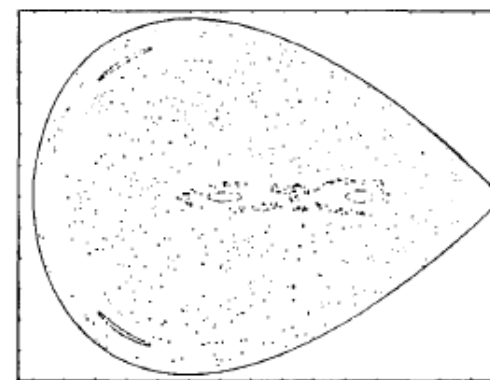
$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3)$$



fázistér szerkezete a metszésfelületen a rendszer energiájától függ



Michel Hénon



invariáns görbék: hurkok → szigetek, szigetláncok köztük
kaotikus tartományok

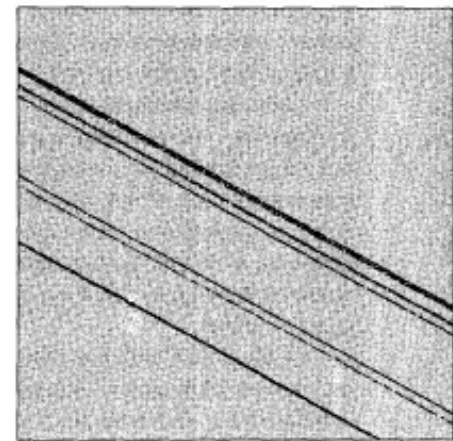
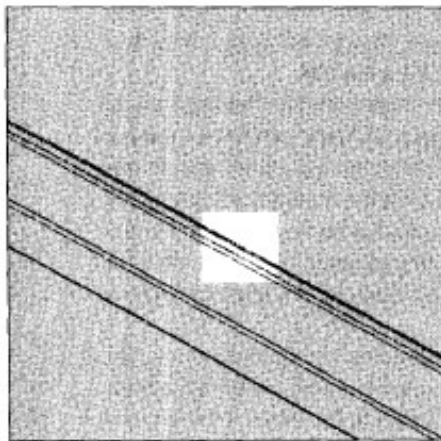
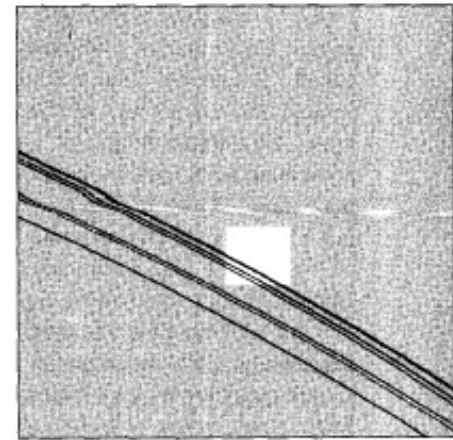
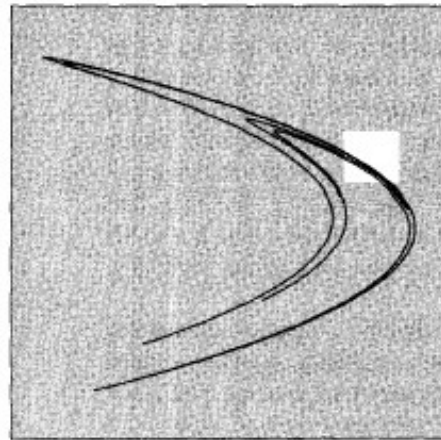
Hénon-atraktor

1976 Communications in Mathematical Physics 50, 69

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned}$$

(a=1.4 b=0.3)

fraktálstruktúra



James P. Crutchfield

Duffing oscillator

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta^2 x + \alpha x^3 = f \cos(\omega t)$$

1918 Georg Duffing

1978 Bender & Orszag

1979 Yoshisuke Ueda

